FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound at
A.M.N.H.

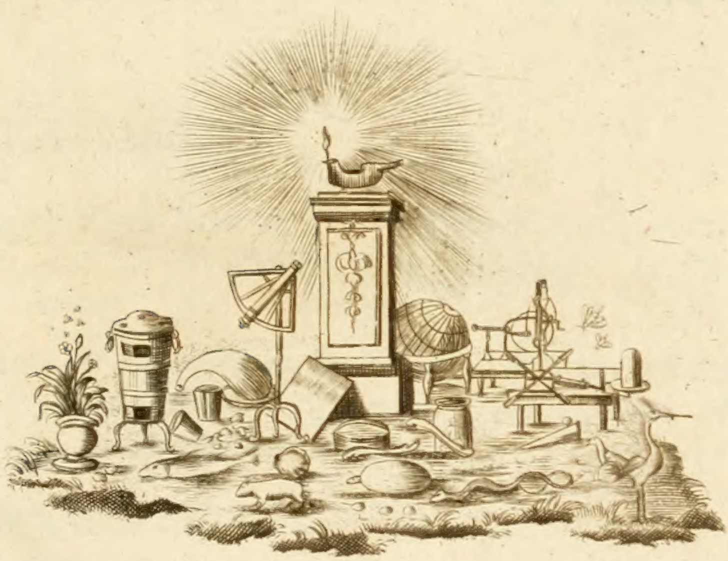
LIBRARY OF THE AMERICAN MUSEUM OF NATURAL HISTORY

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

5.06 (47.4)

pro Anno MDCCLXXXI.

PARS POSTERIOR.



4/22/1916 collated

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXV.

r16.70296 april 28

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXXI. Juillet —— Décembre.

ASTRONOMIE

Pag.

Extrait d'une lettre de M. Chrétien Mayer, *Aſtronome de S. A. S^{me} Msgr. l'Electeur du Palatinat* - - - - - - - 3.

Calculs & obſervations de l'Eclipſe du Soleil du 17 *Octobre* 1781 *n. ſt. extrait d'une lettre de M.* le D. Wolff *de Dantzig* - - - 8.

METEOROLOGIE.

Été de 1781 - - - - - - 12.

Pag.

MORTS

Précis de la vie M. Théodor Moiſéenkof - 17.

OUVRAGES *imprimés ou manuſcripts, machines & inventions, préſentés à l'Académie pendant le dernier ſémeſtre de l'année* 1781 - - 21.

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

ad Annum MDCCLXXXI. Pars poſterior.

Cum tabulis VI. aeri inciſis.

MATHEMATICA Pag.

LEONH. EVLER. *Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrali* $\int \frac{Z\,dz}{\sqrt{(1+mzz+nz^4)}}$ *contentarum, denotante Z functionem quamcunque rationalem ipſius z z* 3.

— — *Vberior euolutio comparationis quam inter arcus ſectionum conicarum inſtituere licet* 23. *Tab. I. fig.* 1 — 4.

— — *De numero memorabili in ſummatione progreſſionis harmonicae naturalis occurrente* - 45.

— — *De inſignibus proprietatibus vnciarum binomii ad vncias quorumuis polynomiorum extenſis* - - - - - 76.

Pag.

MART. PLATZMANN. *Solutio problematis ex methodo tangentium inuerſa. Tab. I. fig.* 5 - 90.

ANDR. JOH. LEXELL. *Integratio formulae cuiusdam differentialis per logarithmos & arcus circulares* - - - - - - 104.

NICOL. FVSS. *Tentamen demonſtrationis, quod omnis quantitas imaginaria ad formam* $A + B\sqrt{-1}$, *reduci poſſit* - - - 118.

PHYSICO-MATHEMATICA

LEONH. EVLER. *De effectu frictionis in motu volutorio. Tab. II. fig.* 6 – 9 - - - 131.

MICH. GOLOVIN. *Applicatio tentaminis de ſono campanarum auctore* L. Eulero, *nouorum commentariorum Tomo* X^mo *inſerti, ad ſonos ſcyphorum vitreorum, qui ſub nomine inſtrumenti harmonici ſunt cogniti* - - - - - 176.

ANDR. IOH. LEXELL. *Meditationes de formula, qua motus laminarum elaſticarum in annulos circulares incuruatarum, exprimitur. Tab. II. fig.* 1 – 5 - - - - - - 185.

PHYSICA

CASP. FRIEDR. WOLFF. *De ordine fibrarum cordis. Diſſertatio III*^a. *De fibris externis ventriculi dextri* - - - - 221.

Pag.

Cum tribus tabulis ſeparatis, quarum binae priores I et II iam Tomi IV. Parte II et Tomi V. Parte I inſertae inueniuntur; tertia vero hic adiungitur.

JOS. THEOPH. KOELREVTER. *Daturae nouae hybridae* - - - - - - - 303.

PET. SIM. PALLAS. *Sorices aliquot illuſtrati* - 314. *Sorex moſchatus et ſorex myoſurus. Tab. III. IV. et V.*

ASTRONOMICA

AND. JOH. LEXELL. *Examen criticum obſeruationum a celeb. Meſſier circa cometam anni 1770 inſtitutarum* - - - - - 351.

STEPH. RVMOVSKI. *Animaduerſio in longitudines vrbium Neſchin, Lubny et Kiowiae* - - 373.

—— —— *Comparatio obſeruationis eclipſis Lunae anno 1783 die $\frac{7}{18}$ Martii in vrbe Charkow habitae, cum obſeruatione Petropoli et Pariſiis inſtituta* - - - - - - 380.

PETR. INOCHODZOW. *Summarium obſeruationum aſtronomicarum pro definiendo ſitu geographico vrbis Kurſk anno 1783 habitarum* - 384.

PETR.

VII.

Pag.

PETR. INOCHODZOW. *De ſitu geographico vrbis Woroneſch, deducto ex obſeruationibus aſtronomicis anno* 1783 *habitis* - - 389.

EPITOME *obſeruationum meteorologicarum Petropoli anno* 1781 *ſecundum Calendarium Gregorianum inſtitutarum* - - - - - 396

ERRA-

ERRATA.

pag.	90	ad marginem	Tab. I. fig. 5.
	99.	lin. 29 et 30	loco ſin. TNE lege ſin. TNC
	103.	lin. 13	loco MR lege NR
	—	— 23	loco NO lege NC
	373.	lin. 6.	lege *Rumovski*
	381.	lin. 7.	lege immergit.
	382.	lin. 11.	lege 23′. 43″.

HISTO-

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXXI.
Juillet —— Décembre.

ASTRONOMIE.

Extrait d'une lettre de Mr. *Mayer*, Aſtronome de S. A. S^me^ Msgr. l'Electeur du Palatinat au Secrétaire des Conférences Académiques *Jean Albert Euler*: datée de Manheim le 25 Juillet.

Je vous prie de communiquer à l'Académie Impériale des Sciences le reſultat de mes obſervations aſtronomiques, faites le 6, 14 & 15 Mars, où il m'a été permis d'obſerver par mon grand Quart-de-cercle mural, fait par *Bird*, & avec une excellente Pendule *d'Arnold*, le paſſage de toutes les planètes par le méridien, & de les comparer avec celui des étoiles fixes; ſavoir les paſſages obſervés le 6 de Mars avec *γ* du Serpentaire & les autres

avec β du Scorpion: d'où étant aſſuré de l'exactitude de la pendule qui s'accordoit jusqu'à une ſeconde avec le mouvement moyen des étoiles fixes, il m'a été facile de trouver l'Aſcenſion droite des planètes.

Par exemple: ayant obſervé le 5 de Mars le paſſage au méridien

de l'étoile *γ* du Serpentaire - -	à $16^h. 56'. 48'', 25$
& de la planète Mars - - -	à 17. 11. 50, 50
je trouve la différence - - -	0. 15. 2, 25
qui fait en arc de l'équateur	$3^d. 45'. 33'', 7$

L'Aſcenſion droite moyenne de l'étoile *γ* étant - -	$8^s. 14^\circ. 27'. 40'', 43$
L'effet de l'aberration de la lumiere	+ 1, 50
& de la nutation de l'axe de la terre	− 10, 00
ſon Aſcenſion droite apparente ſera	$8^s. 14^\circ. 27'. 31'', 93$
& l'Aſcenſion droite de Mars - -	8. 18. 13. 5, 60

Enſuite, de la diſtance de Mars au Zenith - - -	72. 10. 9, 60

corrigée par la réfraction qui convient à l'état de l'Atmoſphère, je trouve en rétranchant la hauteur du Pole

de mon obſervatoire, qui eſt - -	$49^\circ. 27'. 55''$
la déclinaiſon auſtrale de Mars - -	$22^d. 10'. 9'', 6$
& de là ſa latitude boréale - - -	0. 19. 20,
& ſa longitude - - - -	$8^s. 19. 8. 31, 7$

La déclinaiſon apparente de l'étoile *γ* du Serpentaire, pour ce même temps, corrigée par l'aberration $+ 2'', 5$ & la nutation $+ 5'', 8$ fut trouvée - $15^\circ. 26'. 22'', 58$

Sui-

Suivent les obſervations & calculs.

L'an 1781 Mars	Aſcenſion droite	Déclinaiſon	Latitude	Longitude	Paſſage au méridien temps vrai.
			Mercure.		
le 6	$11^s.29^\circ.54'.43'',2$	$0^d.\ 3'.31''$. B	$0^d.\ 1'.\ 6''$. B	$0^s.\ 0^d.\ 6'.10''$,	$12^h.49'.52'',7$
14	0. 10. 45. 0, 4	6. 35. 16.	1. 47. 55.	0. 12. 27. 38,4	1. 3. 51, 6
15	0. 11. 45. 56, 0	7. 14. 33, 1	2. 0. 36, 3	0. 13. 38. 41,0	1. 4. 15, 9
			Venus.		
le 5	$10^s.26^\circ.16'.29''$.	$14^d.35'.\ 9''$. A	$0^d.58'.27''$. A	$10^s.23^d.36'.44''$,	$22^h.35'.41'',5$
13	11. 5. 52. 18.	11. 21. 19, 5	1. 12. 5, 2	11. 3. 30. 14,	22. 44. 41, 4
14	11. 7. 3. 20, 8	10. 55. 33.	1. 13. 42, 5	11. 4. 44. 33.	22. 45. 46, 4
			Mars.		
le 5	$8^s.18^\circ.13'.\ 5'',6$	$22^d.42'.14'',6$. A	$0^d.19'.20''$. B	$8^s.19^d.\ 8'.31'',7$	$18^h.\ 4'.\ 9'',3$
13	8. 23. 0. 40, 8	23. 8. 20, 7	0. 10. 26, 3	8. 23. 34. 33	17. 53. 58, 9
14	8. 23. 36. 22, 4	23. 11. 2, 4	0. 9. 19, 2	8. 24. 7. 27, 8	17. 52. 42, 8
			Jupiter.		
le 5	$7^s.25^\circ.19'.31'',9$	$18^d.30'.58''$ A	$1^d.\ 6'.25''$. B	$7^s.27^d.20'.45''$,	$16^h.32'.48''$
13	7. 25. 24. 18, 4	18. 31. 44, 5	1. 6. 33.	7. 27. 25. 21	16. 3. 50, 3
14	7. 25. 23. 50, 4	18. 30. 41, 7	1. 7. 28	7. 27. 24. 40, 9	16. 0. 10
			Saturne.		
le 5	$8^s.18^\circ.40'.13''$.	$21^d.31'.\ 5'',1$. A	$1^d.32'.15''$. B	$8^s.19^d.27'.57'',3$	$18^h.\ 5'.57'',8$
13	8. 18. 55. 52, 8	21. 31. 21, 5	1. 33. 7, 4	8. 19. 42. 28, 8	17. 37. 40, 6
14	8. 18. 57. 17, 8	21. 31. 23	1. 33. 11	8. 19. 43. 47, 9	17. 34. 9, 3

Paſſage du Centre du Soleil au méridien, à la Pendule le 6 Mars à 23^h. 8'. 36''. 35

Son Aſcenſion droite tirée de la comparaiſon avec celle de l'étoile *y* du Serpentaire - - - - - 11^s. 17^d. 24'. 34'', 18

Diamètre apparent du Soleil obſervé 32. 13

Diſtance corrigée du centre du Soleil au Zénith - - - - 54. 52. 17, 5

Déclinaiſon obſervée du Soleil, auſtrale 5. 24. 22, 5

la même trouvée par le calcul - - 5. 24. 24

Longitude vraie du Soleil au moment de ſon paſſage par le méridien 11^s. 16^d. 18'. 56'', 1

Paſſage du 1er bord de la Lune au méridien, temps de la pendule le 6 de Mars - - - - à 8^h. 7'. 23'', 5

ſon Aſcenſion droite - - - - 3^s. 29^d. 15'. 26'', 68

Hauteur du centre de la Lune corrigée

de la Parallaxe - - 34'. 28'', 4

de la Réfraction - 26, 8 &

de l'effet de la figure de la terre - - + 16'. 56'' - 66^d. 53'. 1'', 5

ſon démi-diamètre étant - - - 16. 12, 3

Déclinaiſon boréale de la Lune - - - 26. 20. 56, 5

Aſcenſion droite du centre de la Lune 3^s. 29. 33. 31

ſa Latitude boréale - - - - - 5. 32. 52

&

& ſa Longitude géocentrique - - $3^s. 26^o. 22'. 8''$
au moment de ſon paſſage au méridien

Paſſages du centre du Soleil au méridien
temps de la Pendule le 14 Mars à - $23^h. 37'. 50''$
le 15 Mars à - 23. 41. 28

J'ai tiré des mes obſervations encore d'autres déterminations importantes pour la perfection de la Théorie des planètes, dont je vais mettre ici les ſuivantes.

1. Temps vrai de la conjonction de Saturne & de Mars
le 6 de Mars matin à $7^h. 31'. 7'', 5$
Longitude vraie de Saturne pour
ce moment - - - $8^s. 19^d. 28'. 58'', 4$

2. Mercure a paſſé par ſon noeud
le 6 de Mars matin - à $10^h. 33'. 25'', 9$
temps vrai.

3. Mars a paſſé par ſon noeud
le 24 de Mars matin - à $7^h. 32'. 59,5''$

Calculs

Calculs & Obſervations de l'Eclipſe du Soleil du 17 Octobre 1781 nouveau Stile: extrait d'une lettre de M. le *D. Wolff* de Dantzig au Secrétaire de l'Académie *J. A. Euler*.

Le calcul donne:
Nouvelle Lune à $10^h. 23'. 5''$ temps vrai
ſa longitude $6^s. 24°. 21'. 13''$. & ſa latitude boréale $6'. 6''$.
Le mouvement horaire du Soleil $2'. 29''$; celui de la Lune dans l'ecliptique $38'. 3''$ & en latitude $3'. 33''$. Enſuite la parallaxe horizontale $61'. 22''$; le démidiamètre du Soleil $16'. 7''$. & de la Lune $16'. 48''$. La hauteur du Pole de Dantzig eſt $54°. 22'. 23''$.

à	$8^h. 34'\frac{1}{2}$.	$9^h. 0'$.	$9^h. 26'\frac{1}{2}$.
Longitude du ☉ - -	$6^s.24°.15'.45''$	$6^s 24°.16'.48''$	$6^s.24°.17'.54''$
Longitude de la ☾ -	6.23. 11.21	6.23. 27.32	6.23. 44.20
Latitude boréale de la ☾	12. 2	11. 8	9.34
Déclinaiſon du ☉ - -	9. 25.30	9. 25.54	9. 26.15
Hauteur du ☉ - -	13. 1.44	15.51. 2	18.29 36
Azimuth du ☉ - -	52. 17. 7	46. 28.43	40. 13.19

Angle

à	$8^h. 34'\frac{1}{2}$	$9^h. 0'$	$6^h. 26'\frac{1}{2}$
Angle du vertical & de la déclinaiſon - - -	27°.50'.47"	25°.21'. 6"	22°.24'.54"
Angle de latit. & de la déclinaiſon - - - -	21. 45. 10	21. 43. 36	21. 40. 50
Angle de la latit. & du vertical - - - - -	49. 35. 57	47. 4. 42	44. 5. 44
Vraie diſtance des centres	65. 30	50. 30	34. 54
Angle de la latit. avec la ligne tirée par les centres	79. 29. 7	77. 18. 50	74. 6. 49
Angle de cette ligne avec le vertical - - - -	29. 53. 10	30. 14. 8	30. 1. 5
Vraie Diff. des Azimuths du ☉ & de la ☾ - -	32. 38	25. 28	17. 24
Vraie Diff. des hauteurs du ☉ & de la ☾ - -	56. 47	43. 36	30. 13
Vraie hauteur de la ☾ -	13. 58. 31	16. 13. 39	18. 59. 49
Parallaxe de cette hauteur	59. 31	58. 54	58. 0
Diff apparente des hauteurs du ☉ & de la ☾ - -	2. 44	15. 18	27. 47
Diff. apparente des azimuths du ☉ & de la ☾ - -	32. 40	25. 35	17. 29
Diſtance apparente de leurs centres - - - -	32. 46	26. 48	32. 49

Le temps de la Pendule ſuivoit de 7 ſecondes le temps moyen: & ſa rétardation diurne a été trouvée de 0",5 par les hauteurs correſpondantes du Soleil priſes le 13: D'où je conclus pour le 17, le midi à la Pendule à $11^h. 45'. 12''$ & le midi moyen à $11^h. 45'. 19''$. Enſorte qu'on doit

ajouter 14'. 46'' aux temps marqués par la pendule pour avoir les temps vrais.

Suivent les obſervations qui ont été faites avec un Teleſcope de Short muni d'un micrometre objectif.

Le 16 Octobre

Temps de la Pendule

à 19^h.	44'.	0''.	Diamètre du Soleil	32'. 12''. 9
19.	48.	0	de même	32. 11. 6
20.	1.	0	de même	32. 10. 4
-	19.	42	Commencement de l'Eclipſe au milieu du bord occidental	
-	-	47		
-	23.	55	partie luiſante du ☉	31'. 55''. 0
-	27.	40	- - - - -	30. 52. 4
-	31.	41	- - - - -	30. 18. 6
-	35.	25	- - - - -	29. 52. 9
-	40.	50	- - - - -	29. 23. 3
-	43.	11	- - - - -	29. 24. 5
-	47.	15	- - - - - -	- Milieu
-	49.	0	- - - - -	29. 34. 3
-	50.	26	- - - - -	30. 22. 3
21	2.	12	- - - - -	30. 19. 9
-	4.	47	- - - - -	31. 45. 8
-	7.	21	- - - - -	31. 36. 6
-	9.	39	- - - - -	32. 4. 3
-	11.	50	Fin au bord occidental vers le Sud	
-	12.	12	Diamètre du Soleil	32. 26. 5
			en prenant le milieu	32. 15. 3
			& par les tables	32. 14. 4

Par

Par conſéquent ſuivant le temps vrai:

Commencement de l'Eclipſe	
le 17 Oct. - - -	à $8^h. 34'. 33''$ matin
Milieu - - -	à 9. 0. 34
& la Fin - - -	à 9. 26. 36

La durée $50'. 3''$. & le plus grand obſcurciſſement $2'. 51''$. ou d'un pouce 5 lignes.

MÉTÉOROLOGIE.

Été de 1781.

ſuivant le nouveau Stile.

1. Il neigea pour la derniere fois le 25 Mai: & il récommença à neiger le 22 Octobre: l'intervalle entre ces deux termes eſt de 150 jours.

2. Il gela pour la derniere fois le 11 Mai, Therm. de Deliſle 152^{d}. Barom. 28, 40, Ciel ſerein, vent NOu. Il recommença à géler le 21 Octobre, Therm. 151^{d}. Barom. 27. 43. Ciel ſerein, vent de Sud. L'intervalle entre ces deux gelées eſt de 163 jours.

3. La rivière débacla le 25 Avril, le Thermomètre étant au point de la congélation naturelle: Bar. 28, 40, ciel couvert, vent NE. Les glaces du Ladoga parurent le 2 Mai, & la rivière les charia le 7. 8.

9. 10. 12. 14 & 15 Mai. 227 jours après le debacle, c'eſt à dire le 8 Décembre, la Neva fut repriſe par un froid de 165 degrés, après avoir charié des glaces pendant 4 jours. Baromètre 28. 28. Ciel ſerein, vent de Nord.

4. La plus grande chaleur a été de 108 degrés le 10 Juillet après midi, Baromètre 28, 02, ciel couvert, vent fort d'Eſt; elle fut ſuivie encore le même après midi d'un grand orage, accompagné de grèle & d'une pluïe à verſe.

5. La chaleur moyenne à midi a été trouvée
depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 128 degrés
depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre 123 — —

La chaleur moyenne au matin & au ſoir
depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 136 degrés
depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre 132 — —

6. La chaleur à midi a été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, ce qui comprend un intervalle de 184 jours

2 jours plus grande que 110 le 10 Juillet & 4 Août
37 jours entre 120 & 110 en Mai —— Août (*)
73 jours entre 130 & 120 en Mai —— Octobre
46 jours entre 140 & 130 en Mai —— Octobre

(*) Le 21 Mai, 8. 16. 19. 20. 29 Juin, 5. 7. 8. 9. 11. 12. 14. 20. 28—31 Juillet, & le 1. 2. 3. 5. 7. — 18. 20. 29. 30 Août.

24 jours entre 150 & 140 en Mai & en Octobre (*)
2 jours entre 160 & 150, le 8 Mai & le 25 Octobre.

7. La chaleur de la nuit a été pendant ces mêmes ſix mois d'été

14 jours moindre que 150 en Mai & en Octobre (**)
49 jours entre 140 & 150 en Mai, Juin, Août, Sept. & Octobre
74 jours entre 130 & 140 en Mai — — Octobre
46 jours entre 120 & 130 en Juin — — Sept. (***)
1 jour entre 110 & 120 le 15 Août.

8. L'état du Baromètre depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre :

Hauteurs extrèmes :

28. 56. le 13 Mai à 8 h. avant midi. Therm. 130 ciel ſerein, calme

27. 22. le 24 Juillet à 3 h. matin. Therm. 131 ciel couvert, vent SE, enſuite beaucoup de pluie. De même le 23 Octobre à 6 h. matin. Therm. 147, ciel couvert, vent NOu, pluie

La variation totale 1. 34
Le milieu - - - 27. 89
La hauteur moyenne 28. 02 c. à d. 28 $\frac{2}{100}$ pouces de Paris

Le

(*) Le 5. 7. 10. 11. 23 — 27 Mai & le 8. 10. 12. 18. 20 — 24. 26 — 31 Octobre.

(**) Le 5 — 11 Mai & le 21. 22. 24. 25. 26. 29. 30 Oct.

(***) Le 16. 18 — 21. 28. 29. 30 Juin, 6. 8 — 16. 27. 28. 29. 31 Juillet, le 1 — 14. 16 — 20. 30 Août & le 19. 20. 21. 2 Septembre.

Le Baromètre s'eſt trouvé 131 jours au deſſus de $27\frac{9}{10}$; 98 jours au deſſus de 28 & 74 jours au deſſus de $28\frac{1}{10}$. pouces.

9. Les vents forts pendant ces ſix mois d'été ont ſoufflé.

2 jours du *Nord* le 10 Mai, & le 3 Juillet.
2 jours du NE le 13 Juin, & le 21 Août.
4 jours de *l'Eſt* le 4 Juillet, & le 23. 25. 26 Sept.
5 jours du SE le 25 Juin, le 24 Juillet, le 27 Août, le 24 Sept. & le 1 Octobre
3 jours du *Sud* le 2 Septembre & le 20 21 Octobre
6 jours du SO*u* le 11. 14 Juillet, le 19. 23 Août, & le 19. 26 Octobre.
18 jours de l'Oueſt le 5. 9. 30 Mai, le 10. 20. 27 Juin, le 6. 15 Juillet, le 12. 15. 16. 17 Août, & le 6. 8. 10. 11. 14. 15 Septembre.
13 jours du NO*u* le 11. 21. 22. 23. 27. 28 Mai, le 2. 11. 26 Juin, le 1. 2. 31 Juillet, & le 11 Août.

10. Les vents très forts ſont venus

1 jour de *l'Eſt*, le 20 Juillet
1 jour du SE, le 10 Juillet
1 jour du *Sud*, le 31 Mai
6 jours du SO*u*, le 13 Juillet, le 31 Août, & le 15. 16. 18. 27 Octobre
2 jours de *l'Oueſt*, le 18 Juin, & le 24 Août
1 jour du NOu, le 23 Juin.

11. Les autres variations atmoſphériques pendant les ſix mois d'été ſont marquées dans la table ſuivante.

Atmo-

Atmoſphère.	Mai	Juin	Juill.	Août	Sept	Oct	Somme
jours entierement ſereins	11	15	9	12	10	2	59 jours
jours entierement couverts	5	2	7	2	4	15	35 —
Brouillards - - -	4	3	2	3	4	4	20 —
Pluie { médiocre - -	5	10	9	8	5	12	49 } 73
Pluie { copieuſe - -	2	0	8	6	1	7	24 }
Neige - - - -	4	- -	- -	- -	- -	4	8 jours
Grêle - - - -	1	- -	2	- -	- -	1	4 —
quantité de l'eau de pluie en pouces - - -	0,84	1,47	3,85	2,36	1,62	1,75	11,89. p.
Orages - - -	- -	- -	2	6	- -	- -	8
Tonnere - - -	- -	2	3	3	- -	- -	8
Aurores boréales - -	- -	- -	- -	1	5	2	8

La quantité de l'eau de pluie tombée pendant ce même intervalle d'été a donc été trouvée de 11 $\frac{89}{100}$ pouces de Paris.

MORTS.

MORTS.

L'Académie a perdu dans le courant de ce Sémeſtre.

1. M. *Tronchin*, Médecin du Corps de S. A. Msgr. le Duc d'Orleans, premier Prince du Sang. Membre de l'Académie royale des Sciences de Paris & de celle des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe. Mort à Paris. Il avoit été reçu au nombre des Aſſociés externes le 13 Octobre 1778.

2. M. *Théodore Moïſéenkof*, Adjoint,

Nous avions déja fait mention de cette mort dans l'hiſtoire du premier ſemeſtre de cette année, en y parlant du voyage que le défunt s'étoit engagé d'entreprendre pour la Crimée. Nous allons donner ici le précis de ſa vie.

Théodore Moïſéenkof, Adjoint de l'Académie Impériale des Sciences, Lecteur & Maitre Docimaſiſte au College Impérial des Mines: nâquit à Lébédin, dans le Gou-

vernement de Charkow, le 11 Novembre 1754. Son pere *Pierre Moïſéenkof*, Intendant de la Police de cette ville, l'envoya à St. Pétersbourg au commencement de 1766, pour y fréquenter le Gymnaſe académique: il y fut d'abord inſcrit comme écolier externe, & eut encore le 30 Octobre de la même année l'avantage d'y être reçu au nombre des élèves de la Couronne. Les progrés qu'il fit dans cette nouvelle carrière, lui mériterent le 30 Novembre 1773 le grade d'étudiant: il s'agiſſoit alors d'embraſſer quelque partie de Sciences pour s'y vouer principalement. Le jeune étudiant témoigna du goût pour l'Aſtronomie pratique, & l'Académie le plaça auprès de l'obſervatoire, en le confiant aux ſoins & à l'inſtruction de M. le Prof. *Roumovsky*: mais la foibleſſe de ſa vüe l'obligea de renoncer à cette étude dès la premiere année: il prit ſur cela le parti de l'échanger contre celle de la Minéralogie, & fit, pour s'y préparer, un cours de chymie ſous M. le Prof. *Laxmann*.

Le Comte *Wolodimer Orlof* ſe trouvoit alors à la tête de l'Académie, & avoit principalement en vüe d'encourager les étudians qu'elle élevoit, à ſe diſtinguer dans les ſciences pour pouvoir quelque jour occuper avec honneur des places d'Académiciens & ſe ſignaler comme tels dans le monde littéraire. Il trouva convenable à ce but d'envoyer à des Univerſités étrangères ceux des ces jeunes éleves, qui avoient le plus de penchant pour la vie lettrée & qui s'y étoient déja diſtingués par leur application. Notre défunt Adjoint fut de ce nombre, & le Comte *Orlof* jugea à propos de l'envoyer en Saxe, païs qu'il connoiſſoit comme le plus propre à ſe perfectionner

dans

dans toutes les parties de Sciences néceſſaires pour former un habile minéralogue. M. *Moïſéenkof* ſe rendit en conſéquence à Freyberg au commencement d'Octobre 1774, & y paſſa près de cinq ans à étudier & à parcourir les principales mines & ouvrages métallurgiques de la haute Saxe. Enrichi de ces connoiſſances il retourna à St. Pétersbourg en 1779, & remporta les ſuffrages des Académiciens, qui le reçurent au nombre des Adjoints, encore vers la fin de la même année. Cette nomination ſe fit ſolemnellement, dans une Aſſemblée publique que l'Académie tint le 12 Octobre, où le nouveau Adjoint eut l'honneur de préſenter un Discours de reception en langue ruſſe, qui traite des moyens les plus ſurs de découvrir & d'exploiter les mines.

En 1780 il s'engagea, avec l'agrément de l'Académie, au Corps de Cadets fondé par le Collège des Mines, & il y fut placé par Ordre de S. M. l'Impératrice comme Lecteur & Maître Docimaſiſte.

En 1781. Le Chan de la Crimée ayant démandé à la Cour Impériale un Minéralogiſte expert pour établir dans ſes états des mines & travaux métallurgiques, le choix tomba ſur M. *Moïſéenkof*, & S. M. l'Impératrice voulut bien y donner Son gracieux conſentement. L'Académie ſaiſit cette occaſion favorable pour charger ſon Adjoint de ſes commiſſions & lui fit expédier là-deſſus une inſtruction détaillée: elle avoit tout lieu d'en attendre une riche récolte d'obſervations & de découvertes interéſſantes en Hiſtoire naturelle, mais la deſtinée en avoit diſpoſée autrement: M. *Moïſéenkof* à peine arrivé à Moscou, y fut

attaqué d'une maladie des plus aigues qui l'enléva au milieu de ſes eſpérances & à la fleur de ſon age, le 24 Septembre 1781, n'ayant accompli que 26 ans 10 mois & 13 jours.

Le défunt avoit vecu trop peu de temps pour ſe ſignaler dans la république des lettres par des ouvrages de ſa compoſition. On n'a de lui qu'une petite brochure en allemand intitulée: *Mineralogiſche Abhandlung von dem Zinnſtein*, qu'il avoit fait imprimer encore en Saxe, avant ſon rétour à St. Pétersbourg. Mais il a traduit en ruſſe divers Ouvrages, qui ont été trés bien accueillis.

OUVRA-

OUVRAGES IMPRIMÉS
OU MANUSCRIPTS,
MACHINES ET INVENTIONS
préſentées à l'Académie pendant le dernier ſémeſtre de l'année 1781.

Dans l'aſſemblée du Vendredi 2 Juillet, M. le Prof. *Pallas* a lu une lettre de M. *Hablitz'l*, Correſpondant de l'Académie à Aſtrachan, ſur les herbes de pâturage dont les Bourghares font uſage pour leur bétail, & dont ils cultivent principalement trois eſpèces qu'ils appellent Bedde, qui n'eſt autre choſe que la Luſerne ordinaire, Jouſchann qui eſt l'Artemoiſe blanche, & Schembebile, que M. *Hablitz'l* n'a pas encore eu occaſion de voir. Il envoie auſſi un Alphabet indien.

—— —— M. le Conſeiller de Cour *Lepechin* a préſenté, de la part de M. le Prof. *Spielmann* à Strasbourg, une collection de ſémences pour le Jardin académique & deux Diſſertations imprimées: *de Analyſi urinae* & *Analecta de Tartaro.*

—— —— M. *Jean-Albert Euler*, Secrétaire de conférences a préſenté, de la part de M. *Euſtache Zanotti* à Bologne, un ouvrage *in folio* intitulé:

La Meridiana del Tempio di San Petronio rinnovata l'anno 1776.

Le 5 Juillet. Le Secrétaire a lu un mémoire adreſſé à l'Académie par M. le Conſeiller de Collèges *Ladiguin* qui envoie & ſousmet à l'approbation deux retortes d'une nouvelle conſtruction plus avantageuſes que ne le ſont les ordinaires pour diſtiller toutes ſortes de liqueurs odériférantes & ſpiritueuſes.

Le 9 Juillet. M. M. le Conſeiller de Cour *Lepechin* & l'Adjoint *Géorgi*, chargés d'examiner les retortes ſus-mentionées, en ont fait un rapport favorable, qui a été lu & approuvé. Une déſcription circonſtanciée de ces nouveaux alambics, avec une inſtruction de s'en ſervir, a été inſérée dans le Calendrier Inſtructif, que l'Académie a publié pour l'année 1784.

Le 13 Août. Le Secrétaire a lu la léttre & le mémoire que S. E. Mr. le Général-en-Chef Comte *Ivan de Tſcherniſchef*, a adreſſé à l'Académie, ſur l'inflammation ſpontanée des mélanges du noir de fumée & de l'huile cuite. Voyez l'Hiſtoire de l'Académie, Année 1779. P. I.

—— —— S. E. Mr. le Conſeiller d'État actuel de *Stehlin*, a lu une lettre de S. E. Mr. le Général Major *de Besborodko*, qui envoie par ordre de SA MAJESTÉ L'IMPÉRATRICE un Inſtrument pour méſurer la vîteſſe du ſon & la diſtance de l'endroit d'où il eſt parti: inventé & conſtruit par M. *Robert Haynam*, Horloger de la Cour. L'ordre porte

porte que l'Académie l'examine & qu'elle en faſſe des eſſais.

L'aſſemblée en avoit chargé M. M. *Jean-Albert Euler*, *Krafft*, *Fuſs* & *Gollovin*, qui en auroient du faire leur rapport à l'Académie; mais l'Artiſte, après quelques conférences ténues en ſa préſence, en avoit redemandé ſon inſtrument, & l'Académie ne l'a plus revu. Cet Inſtrument n'étoit au reſte qu'un Chronomètre où chaque ſeconde de temps eſt ſubdiviſée en pluſieurs inſtans.

Le 20 Août. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. de *Blancherie*:

Correſpondance générale & gratuite pour les Sciences & les Arts. Titre & avertiſſement du Tome IIIe.

Nouvelles de la République des lettres & des arts No. I. & ſuivans.

—— —— de la part de la Societé Royale des Sciences de Londres:

Philoſophical Transactions. Vol. 70. Part. I.

—— —— enfin de la part des Académies Royales des Sciences de Stockholm & d'Upſala:

Kongl. Vetenskaps Academiens nya Handlingar Tom. I, för År 1780, quatre trimeſtres

Nova Acta Regiae Societatis Sc. Upſalienſis Vol. III^um

Torberni Bergman Opuſcula Phyſica & Chemica Vol. II^um

I. G. Wallerii ſyſtema mineralogicum Tom. I. & II.

Eiusdem Lucubrationum academicarum Specimen I^um

Onze

Onze Diſſertations académiques publiées à l'Univerſité d'Upſala ſous les préſidences de M. M. *Murray*, *Jonas Sidrén*, *Torb. Bergman*, *Charles Linné*, *Charl. P. Thunberg* & *Fred. Mallet*.

Le 27 Août. M. l'Adjoint *Fuſs* a lu une lettre de M. *Chrétien Mayer* Aſtronome à Mannheim, qui envoie à l'Académie ſes obſervations & calculs des Planètes faites au mois de Mars de la préſente année: voyez ci-deſſus.

—— —— il a préſenté de la part de M. *l'Abbé Spalanzani*.

Diſſertazioni di Fiſica animale & vegetabile: 2 vol. in 8vo.

Le 3 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Auteur

Le Bombardier pruſſien, ou du mouvement des projectiles; par M. *Tempelhof* Capitaine d'Artillerie, imprimé à Berlin 1781.

Le 6 Septembre. M. le Prof. *Pallas* a lu divers rapports de M. *Jährig* datés de la Horde des Calmouques auprès de Gouſinoi-Ozero, qui envoie une traduction allemande d'un ouvrage mongal ſur la littérature de Khubilgan - Sſah - Gidſchal Wendidah & ſur la méthode du Paggbeh Lama: encore diverſes anecdotes curieuſes, des Images réligieuſes des mongaux, & quelques herbes ſechées avec leur déſcriptions & uſages. Ces envois ont été rendus à M. *Pallas*, pour en faire mention dans ſon hiſtoire des peuples mongaux. M. *Jährig* rapporte auſſi avoir pris

pris chez lui deux jeunes éléves mongaux, de la capacité des-quels il ſe promet beaucoup. Enfin il ſe loue d'un vieux Lama Bandida, qui lui rend toutes ſortes de ſervices. Sur quoi l'Académie a réſolu d'envoyer à ce Lama en reconnoiſſance la médaille frappée à l'occaſion du Jubilé académique.

Le 24 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie Royale des Sciences de Paris

Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris: Année 1777 avec les mémoires de Mathématiques & de Phyſiques pour la même année.

—— —— de la part de M. *D'Alembert*

Opuſcules mathématiques Tome VIIe & VIIIe.

—— —— & de la part de M. *l'Abbé Rozier*

Journal de Phyſique & d'Hiſtoire naturelle Année 1780 Tom. XVI. Juillet —— Décembre: Annee 1781. Tom. XVII. Janvier —— Mars.

Le 4 Octobre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *Dilthey* Profeſſeur en Droit à l'Univerſité Impériale de Moscou

Topographie du nouveau Gouvernement de Toula.

—— —— & de la part de l'Univerſité Impériale de Moscou.

Deux Diſcours prononcés par M. M. les Profeſſeurs *Schaden* & *Barſof*, dans une aſſemblée publique ténue le 23 Septembre.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Comte *de Borch*, Grand-Quartier-Maître-Général de Lithuanie, qui envoie à l'Académie ſes lettres ſur les truffes du Piemont imprimées in 8vo.

Le 25 Octobre. Le Secrétaire a préſenté de la part de la Societé Royale des Sciences de Göttingen

Commentationes Societatis regiae Scientiarum Göttingenſis Vol. III. per annum 1780.

Le 5 Novembre: De la part de M. *Benjamin Wilſon*

A short view of Electricity imprimé à Londres.

Le 15 Novembre. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à Meſſieurs de l'Académie par un nommé *Thimothé Crembs* à Londres, qui donne avis d'une méthode nouvelle d'éteindre les incendies en jettant dans les flammes certaines compoſitions de drogues. Cette lettre n'a pas mérité l'attention de l'Académie & à été miſe de rebut.

Le 22 Novembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de la Societé Royale des Sciences de Londres

Philoſophical Transactions Vol. 70 for the Year 1780 P. 2.

de

de la part de M. de *Magellan*

Journal of Voyage in 1775 to explore coaſt of America.

Nouvelle conſtruction *d'Alembic* pour faire toute ſorte de Diſtillation en grand.

par les ſoins du même & de la part des Auteurs

Expriments and Obſervations of natural Philoſophy vol. II. by Ioſeph Priſtley

Hiſtory of the Origin of Medecine an Oration by Ioan Coakley Lettſon.

Le 29 Novembre. M. l'Adjoint *Fuſs* a préſenté de la part de M. le Baron de *Paccaſſi* à Vienne

Leonhard Eulers Theorie der Planeten und Kometen von Iohann Freyherrn von *Paccaſſi* überſetzt

avec le reſultat des Calculs que ce ſavant a faits des deux derniers comètes & quelques autres recherches aſtronomiques dont il s'eſt occupé.

Le 3 Décembre. M. le Conſeiller d'Etat actuel de *Stéhlin* a préſenté de la part de l'Académie Royale de Madrit

El ingenioſo Hidalgo Don Quixote de la Mancha. Nouvelle édition magnifique en 4 volumes in 4to avec un grand nombre de tailles-douces.

—— —— Le Secrétaire a lu une lettre de M. *Macklot* datée de Carlsruh le 4 Octobre, qui envoie trois exemplaires de ſon chef d'oeuvre de Typographie intitulé:

Table raiſonnée des Principes de l'Economie politique rédigée après l'Abrégé des Principes de l'Economie

nomie politique par S. A. S^{me}. Mſgr. le Margrave regnant de Bade, imprimé en 50 pages petit *in Octavo.*

Un exemplaire, ſuivant l'intention de l'Auteur, a été préſenté à S. M. l'Impératrice par le Grand-Chambellan de Schouvalof, l'autre a été remis au Directeur de l'Académie, et le troiſieme depoſé à la Bibliothéque académique.

—— —— il a lu une lettre adreſſée à l'Académie par le Conſeiller de Cour *Böckmann* à Carlsruh, qui donne avis d'un envoi qu'il a fait des ſes ouvrages météorologiques, mais qui ne ſont pas arrivés.

—— —— M. le Prof. *Pallas* a communiqué une lettre de M. *Jacquin* de Vienne, qui mande avoir envoyé déja depuis quelque temps le Ier Tome de ſes Miſcellanea auſtriaca, qui cependant n'eſt pas encore parvenu à l'Academie.

—— —— M. l'Adjoint *Géorgi* a lu une lettre de M. le Prof. *Ferber* de Mitau, qui envoie le Proſpectus d'un ouvrage de M. *Torberen Bergmann* intitulé.

Sciagraphia regni mineralis, ſecundum principia proxima digeſti.

Le 10 Décembre. M. le Prof. *Lexell* a préſenté de la part de l'Auteur,

Tabula numerorum primorum et pro minimis diviſoribus compoſitorum ad octo millia vltra millionem

nem expedite inueniendis, conſtructa a *Nicolao Schenmark* Math. Prof. Vpſal.

Manuſcript précieux que l'Académie a reçu avec empreſſement, & qu'elle conſerve ſoigneuſement à ſa Bibliothéque.

—— —— M. le Conſeiller d'Etat actuel de *Steblin* a remis de la part de M. Du Hamel du Monceau à Paris.

Traité général des Péches. Suite de la II Partie. Tom. III. Section IX.

Le 13 Décembre: M. le Prof. *Pallas* a préſenté le Proſpectus d'un ouvrage intitulé

Tentamina hiſtoriae naturalis vermium viſceralium animantium corporibus inhabitantium

que M. *Goeze* à Quedlinbourg ſe propoſe de publier par la voie de la prénumeration.

Le 17 Décembre. M. le Prof. *Lexell* a remis de la part du bureau des Longitudes établi à l'Amirauté de Londres.

A Sexageſimal Table —— by *Michael Taylor* 4to.
The nautical Almanach for the Year 1786 8vo.
Tables requiſite to be uſed with the nautical Ephemeris II. Edition 8vo.

—— —— de la part de M. *Vandermonde*, de l'Académie des Sciences de Paris:

Second Mémoire ſur un nouveau *Syſteme* d'harmonie applicable à l'état actuel de la Muſique.

—— —— M. l'Adjoint *Géorgi* a annoncé un ouvrage ichthyologique avec de très belles figures enluminées que M. le Docteur *Bloch* a Berlin publie ſous le titre

Beyträge zur oekonomiſchen Naturgeſchichte der Fiſche nach Originalien beſchrieben und abgebildet.

Le Secrétaire a préſenté tous les mois les obſervations météorologiques faites à Berlin par M. l'Académicien *Béguelin* & à Moſcou par M. l'Aſſeſſeur *Engel*.

MATHE-

MATHEMATICA.

PLENIOR EXPLICATIO
CIRCA COMPARATIONEM QVANTITATVM IN FORMVLA INTEGRALI

$$\int \frac{Z\,dz}{\sqrt{(1+mzz+nz^4)}}$$

CONTENTARVM, DENOTANTE Z FVNCTIONEM QVAMCVNQVE RATIONALEM IPSIVS zz.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Etſi hoc argumentum iam ſaepius tractaui atque Illuſtriſſimus *La Grange* plures egregias obſeruationes ſuper huiusmodi formulis cum publico communicauit: id tamen neutiquam adhuc ſatis exploratum, multo minus exhauſtum eſt cenſendum, ſed plurima adhuc maxime abſcondita inuoluere videtur, quae profundiſſimam indagationem requirunt atque inſignia incrementa Analyſeos pollicentur. Imprimis autem ipſae operationes analyticae, quae me pri-

mum ad hanc inueſtigationem perduxerunt, ita ſunt comparatae, vt non niſi per plures ambages totum negotium conficiant, vnde merito etiamnunc methodus directa ad easdem comparationes perducens maxime eſt deſideranda. Praeterea vero vniuerſa haec inueſtigatio multo latius patet, quam eas formulas integrales, quas primo ſum contemplatus, vbi pro littera Z tantum vel quantitatem conſtantem vel functionem integram ipſius zz huius formae: $F + Gzz + Hz^4 + Iz^6 + Kz^8$ etc. aſſumſi, quibus caſibus oſtendi, propoſitis duabus quibuscunque quantitatibus huius generis, ſemper tertiam eiusdem generis inueniri poſſe, quae a ſumma illarum diſcrepet quantitate algebraica, quae quidem euaneſcat caſu quo Z eſt tantum quantitas conſtans.

§. 2. Nunc autem obſeruaui, easdem comparationes inſtitui poſſe, ſi pro Z accipiatur functio quaecunque rationalis ipſius zz, quae ſcilicet habeat huiusmodi formam:

$$\frac{F + Gzz + Hz^4 + Iz^6 + Kz^8 + etc.}{\mathfrak{F} + \mathfrak{G}zz + \mathfrak{H}z^4 + \mathfrak{I}z^6 + \mathfrak{K}z^8 + etc.}$$

vbi quidem hoc diſcrimen occurrit, quod differentia inter ſummam duarum huiusmodi formularum et tertiam formulam eiusdem generis inueniendam non amplius ſit quantitas algebraica, veruntamen per logarithmos et arcus circulares ſemper exhiberi poſſit; ita vt nunc iſta inueſtigatio multo latius pateat, quam eam adhuc eram complexus. Atque hinc fortaſſe, ſi omnes operationes, quae ad hunc ſcopum manuducunt, debita attentione perpendantur, faciliorem viam apperire poterunt ad methodum directam perueni-

ueniendi totumque hoc argumentum maxime abſtruſum feliciori ſucceſſu perſcrutandi.

§. 3. Quo autem haec omnia clarius perſpici queant, denotet iſte character $\Pi : z$ eam quantitatem tranſcendentem, quae ex integratione formulae propoſitae $\int \frac{Z\,dz}{\sqrt{(1+mzz+nz^4)}}$ naſcitur, dum integrale ita capi aſſumitur, vt euaneſcat poſito $z = 0$; vnde ſtatim manifeſtum eſt, fore quoque $\Pi : 0 = 0$. Deinde cum Z inuoluat tantum pares poteſtates ipſius z, cuiusmodi etiam in formula radicali inſunt, euidens eſt, ſi loco z ſcribatur $-z$, tum valorem quoque iſtius formulae integralis ideoque etiam characteris $\Pi : z$ in ſui negatiuum abire, ita vt ſit $\Pi : (-z) = -\Pi : z$. His praenotatis ſi proponantur duae quaecunque huiusmodi quantitates $\Pi : p$ et $\Pi : q$, ſemper inuenire licet tertiam quantitatem eiusdem generis $\Pi : r$, quae a ſumma illarum formularum $\Pi : p + \Pi : q$ differat quantitate vel algebraica vel ſaltem per logarithmos et arcus circulares aſſignabili. Regula vero, qua ex datis litteris p et q tertia r elicitur, ſemper manet eadem, quaecunque functio per litteram Z deſignetur: ſemper enim erit

$$r = \frac{p\sqrt{(1+mqq+nq^4)} + q\sqrt{(1+mpp+np^4)}}{1-nppqq}.$$

Hinc autem pro ſequentibus combinationibus obſeruaſſe iuuabit fore $\sqrt{(1+mrr+nr^4)} =$

$$\frac{(mpq+\sqrt{(1+mpp+np^4)}\sqrt{(1+mqq+nq^4)})(1+nppqq)+2npq(pp+qq)}{(1-nppqq)^2}.$$

§. 4. Non ſolum autem haec inueſtigatio adſtringitur ad huiusmodi formulas $\Pi : p$ et $\Pi : q$ pro arbitrio accipiendas, ſed adeo ad quotcunque formulas datas poteſt

extendi, ita vt, quotcunque huiusmodi formulae ſuerint propoſitae, ſcilicet:

$$\Pi : f + \Pi : g + \Pi : h + \Pi : i + \Pi : k + \text{etc.}$$

ſemper noua huiusmodi formula $\Pi : r$ aſſignari poſſit, quae ab illarum ſumma diſcrepet quantitate vel algebraica vel ſaltem per logarithmos et arcus circulares aſſignabili. Quin etiam formulas illas, quas tanquam datas ſpectauimus, ita definire licebit, vt diſcrimen illud, ſiue algebraicum ſiue a logarithmis arcubusque circularibus pendens, prorſus euaneſcat, ita vt futurum ſit:

$$\Pi : r = \Pi : f + \Pi : g + \Pi : h + \Pi : i + \Pi : k + \text{etc.}$$

Atque haec fere ſunt, ad quae hanc inueſtigationem generaliorem, quam hic exponere conſtitui, mihi quidem extendere licuit; quamobrem ſingulas operationes, quae me huc perduxerunt, ſuccincte ſum propoſiturus.

Operatio I.

§. 5. Vniuerſam hanc inueſtigationem inchoaui a conſideratione huius aequationis algebraicae:

$$\alpha + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy + \zeta xxyy = 0,$$

ex qua, cum ſit quadratica, tam pro x quam pro y radicem extrahendo, colligitur vel

$$y = \frac{-\delta x + \surd(-\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta)xx - \gamma\zeta x^4)}{\gamma + \zeta xx} \text{ vel}$$

$$y = \frac{-\delta y + \surd(\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta)yy - \gamma\zeta y^4)}{\gamma + \zeta yy},$$

ita vt hinc fiat

$$\surd(-\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta)xx - \gamma\zeta x^4 = \gamma y + \delta x - \zeta xxy \text{ et}$$

$$\surd(-\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta)yy - \gamma\zeta y^4 = \gamma x + \delta y + \zeta xyy).$$

§. 6.

§. 6. Nunc litteras α, γ, δ, ζ, ita definio, vt ambae formulae radicales ad formam

$$\surd(1 + mxx + na^4) \text{ et } \surd(1 + myy + ny^4),$$

reducantur, quem in finem facio

$$1^\circ.\ -\alpha\gamma = k,$$
$$2^\circ.\ \delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta = mk \text{ et}$$
$$3^\circ.\ -\gamma\zeta = nk,$$

ex quarum aequalitatum prima fit $\alpha = -\frac{k}{\gamma}$, ex tertia $\zeta = \frac{-nk}{\gamma}$, qui valores in ſecunda ſubſtituti praebent

$$\delta\delta = \gamma\gamma + \frac{nkk}{\gamma\gamma} + mk,$$

ideoque

$$\delta = \surd(\gamma\gamma + \frac{nkk}{\gamma\gamma} + mk) = \frac{1}{\gamma}\surd(\gamma^4 + m\gamma\gamma k + nkk),$$

vnde aequatio noſtra nunc erit

$$-k + \gamma\gamma(xx+yy) + 2xy\surd(\gamma^4 + m\gamma\gamma k + nkk) - nkxxyy = 0,$$

hinc igitur ambae noſtrae formulae irrationales erunt

$$\surd k(1 + mxx + nx^4) = \gamma y + \frac{1}{\gamma}x\surd(\gamma^4 + m\gamma\gamma k + nkk) - \frac{nk}{\gamma}xxy,$$
$$\surd k(1 + myy + ny^4) = \gamma x + \frac{1}{\gamma}y\surd(\gamma^4 + m\gamma\gamma k + nkk) - \frac{nk}{\gamma}xyy.$$

§. 7. Cum nunc ambae quantitates x et y ita a ſe inuicem pendeant, quemadmodum aequatio aſſumta declarat, litteras adhuc indefinitas γ et k ita definiamus, vt poſito $x = 0$ fiat $y = a$. Oportebit igitur eſſe $-k + \gamma\gamma aa = 0$, ideoque $k = \gamma\gamma aa$, quo valore ſubſtituto aequatio noſtra erit

$$0 = \gamma\gamma(xx + yy - aa) + 2\gamma\gamma xy\surd(1 + maa + na^4)$$
$$- n\gamma\gamma aaxxyy,$$

hincque fiet per $\gamma\gamma$ diuidendo

$0 =$

$$o = (xx + yy - aa) + 2xy\sqrt{(1 + maa + na^4)} - naaxxyy.$$

Tum vero ambae noſtrae formulae radicales ita exprimentur:

$$\sqrt{(1 + mxx + nx^4)} = \tfrac{y}{a} + \tfrac{x}{a}\sqrt{(1 + maa + na^4)} - naxxy$$

$$\sqrt{(1 + myy + ny^4)} = \tfrac{x}{a} + \tfrac{y}{a}\sqrt{(1 + maa + na^4)} - naxyy.$$

§. 8. Quo has formulas tractatu faciliores reddamus, ponamus $\sqrt{(1 + maa + na^4)} = \mathfrak{A}$, ſimilique modo $\sqrt{(1 + mxx + nx^4)} = \mathfrak{X}$ et $\sqrt{(1 + myy + ny^4)} = \mathfrak{Y}$, et aequatio noſtra erit

$$xx + yy - aa + 2\mathfrak{A}xy - naaxxyy = o;$$

vnde reperitur

$$y = -\frac{\mathfrak{A}x + a\mathfrak{X}}{1 - naaxx} \text{ et } x = -\frac{\mathfrak{A}y + a\mathfrak{Y}}{1 - naayy},$$

vnde patet ſi fuerit $y = o$ fore $x = a$; tum vero erunt formulae radicales

$$\sqrt{(1 + mxx + nx^4)} = \mathfrak{X} = \tfrac{y}{a} + \tfrac{\mathfrak{A}x}{a} - naxxy,$$

$$\sqrt{(1 + myy + ny^4)} = \mathfrak{Y} = \tfrac{x}{a} + \tfrac{\mathfrak{A}y}{a} - naxyy.$$

§. 9. Quemadmodum autem tam y per x quam x per y exprimere licuit, ita etiam $\mathfrak{Y}$ per ſolum x et $\mathfrak{X}$ per ſolum y exprimere licebit. Calculo autem inſtituto reperietur fore.

$$\mathfrak{X} = \frac{(-may + \mathfrak{A}\mathfrak{Y})(1 + naayy) - 2nay(aa + yy)}{(1 - naayy)^2},$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{(-max + \mathfrak{A}\mathfrak{X})(1 + naaxx) - 2nax(aa + xx)}{(1 - naaxx)^2}.$$

§. 10. Praecipue autem circa noſtram aequationem

$$xx + yy - aa + 2\mathfrak{A}xy - naaxxyy = o$$

notari

notari meretur, quod ternae quantitates xx, yy, aa perfecte inter ſe ſint permutabiles. Si enim membrum irrationale ad alteram partem transferatur, vt ſit

$$xx + yy - aa - naaxxyy = -2\mathfrak{A}xy,$$

et quadrata ſumantur, reſtituendo pro $\mathfrak{A}^2$ valorem ſuum $1 + maa + na^4$, prodibit iſta aequatio:

$$\left.\begin{array}{lll} +x^4 - 2xxyy - 4maaxxyy & - 2na^4xxyy & + nna^4x^4y^4 \\ +y^4 - 2aaxx & - 2naax^4yy & \\ +a^4 - 2aayy & - 2naaxxy^4 & \end{array}\right\} = 0,$$

vbi permutabilitas litterarum a, x, y manifeſto in oculos incurrit. In ipſis quidem formulis ſuperioribus, vbi ipſa quantitas a ingreditur, permutabilitas non adeo eſt manifeſta, ſed prorſus elucebit, ſi loco a ſcribamus $-b$, itemque $\mathfrak{B}$ loco $\mathfrak{A}$; tum enim, quemadmodum erat

$$y = -\frac{x\mathfrak{B} - b\mathfrak{X}}{1 - nbbxx} \text{ et } x = -\frac{y\mathfrak{B} - b\mathfrak{Y}}{1 - nbbyy},$$

ita erit $b = \frac{-x\mathfrak{Y} - y\mathfrak{X}}{1 - nxxyy}$; ſimilique modo pro formulis radicalibus ſeu litteris maiuſculis erit

$$\mathfrak{Y} = \frac{(mbx + \mathfrak{B}\mathfrak{X})(1 + nbbxx) + 2nbx(bb + xx)}{(1 - nbbxx)^2},$$

$$\mathfrak{X} = \frac{(mby + \mathfrak{B}\mathfrak{Y})(1 + nbbyy) + 2nby(bb + yy)}{(1 - nbbyy)^2},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{(mxy + \mathfrak{X}\mathfrak{Y})(1 + nxxyy) + 2nxy(xx + yy)}{(1 - nxxyy)^2},$$

ſicque perfecta permutabilitas perſpicitur.

Operatio II.

§. 11. Differentiemus nunc noſtram aequationem algebraicam aſſumtam, quae eſt

$$xx + yy - aa + 2\mathfrak{A}xy - naaxxyy = 0,$$

et aequatio differentialis erit

$$dx(x+\mathfrak{A}y-naaxyy)+dy(y+\mathfrak{A}x-naaxxy)=0,$$

ſiue

$$\frac{dx}{y+\mathfrak{A}x-naaxxy}+\frac{dy}{x+\mathfrak{A}y-naaxyy}=0.$$

Ex ſuperioribus autem conſtat eſſe

$$y+\mathfrak{A}x-naaxyy=a\mathfrak{X} \text{ et}$$
$$x+\mathfrak{A}y-naaxyy=a\mathfrak{Y},$$

vnde aequatio differentialis hanc induet formam:

$$\frac{dx}{a\mathfrak{X}}+\frac{dy}{a\mathfrak{Y}}=0, \text{ ſiue}$$
$$\frac{dx}{\surd(1+mxx+nx^4)}+\frac{dy}{\surd(1+myy+ny^4)}=0.$$

§. 12. Inuenta igitur hac aequatione differentiali denotet iſte character $\Gamma:x$ integrale $\int\frac{dx}{\mathfrak{X}}$, et character $\Gamma:y$ integrale $\int\frac{dy}{\mathfrak{Y}}$, vtroque integrali ita ſumto, vt euaneſcat poſito vel $x=0$ vel $y=0$, atque aequationem illam differentialem integrando fiet $\Gamma:x+\Gamma:y=C$. Cum autem ſumto $x=0$ fiat etiam $\Gamma:x=0$ et $y=a$, erit conſtans illa $C=\Gamma:a$, ita vt habeamus hanc aequationem: $\Gamma:x+\Gamma:y=\Gamma:a$.

§. 13. Quoniam hic nulla amplius variabilitatis ratio tenetur, patet, ſumtis binis litteris x et y pro lubitu, litteram a ita ſemper definiri poſſe, vt fiat

$$\Gamma:a=\Gamma:x+\Gamma:y.$$

Si enim in §. 10. loco b ſcribatur $-a$, ſumi debet

$$a=\frac{x\mathfrak{Y}+y\mathfrak{X}}{1-nxxyy},$$

quae comparatio iam caſum conſtituit ſpecialem inueſtigationis

tionis generalis, quam ſuſcepimus. Si enim loco x et y ſcribamus p et q, at r loco a, tum vero $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$ loco $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{A}$, atque ſi, ſumtis pro lubitu quantitatibus p, q, capiatur $r = \frac{p\mathfrak{Q} + q\mathfrak{P}}{1 - nppqq}$; tum vtique erit $\Gamma : r = \Gamma : p + \Gamma : q$, ita vt hoc caſu diſcrimen illud inter $\Gamma : r$ et ſummam $\Gamma : p + \Gamma : q$ plane euaneſcat. Sicque iam euoluimus caſum, quo in noſtra forma generali $\int \frac{Z\,dz}{\sqrt{(1 + mzz + nz^4)}}$ pro Z ſumitur quantitas conſtans.

Operatio III.

§. 14. Quo nunc propius ad noſtrum inſtitutum accedamus, ſint X et Y tales functiones ipſarum x et y, qualem volumus eſſe Z ipſius z, et quoniam modo inuenimus

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 + mxx + nx^4)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1 + myy + ny^4)}} = 0,$$

ponamus eſſe

$$\frac{X\,dx}{\sqrt{(1 + mxx + nx^4)}} + \frac{Y\,dy}{\sqrt{(1 + myy + ny^4)}} = dV,$$

ita vt, ſi X et Y eſſent quantitates conſtantes, foret $dV = 0$. Hinc ergo ſi loco $\frac{dy}{\sqrt{(1 + myy + ny^4)}}$ ſcribamus $\frac{-dx}{\sqrt{(1 + mxx + nx^4)}}$, fiet $dV = \frac{(X - Y)\,dx}{\sqrt{(1 + mxx + nx^4)}}$, vel etiam

$$dV = \frac{(Y - X)\,dy}{\sqrt{(1 + myy + ny^4)}}.$$

At ſi loco radicalium ſuos valores rationales ſcribamus, erit

$$dV = \frac{a(X - Y)\,dx}{y + \mathfrak{A}x - naaxxy} \text{ vel}$$

$$dV = \frac{a(Y - X)\,dy}{x + \mathfrak{A}y - naaxyy}.$$

§. 15. Cum autem nulla ſit ratio, cur iſtud differentiale dV potius per dx quam per dy exprimamus;

 conſul-

conſultum erit nouam quantitatem in calculum introducere, quae aeque referatur ad x et ad y. Hunc in finem faciamus productum $xy = u$, ac ſtatuamus

$$\frac{dx}{y + \mathfrak{A}x - naaxxy} = - \frac{dy}{x + \mathfrak{A}y - naaxyy} = s\,du.$$

Hinc igitur erit

$$dx = s\,du\,(y + \mathfrak{A}x - naaxxy) \text{ et}$$
$$dy = - s\,du\,(x + \mathfrak{A}y - naaxyy),$$

ex quibus colligimus

$$y\,dx + x\,dy = s\,du\,(yy - xx) = du,$$

ſicque habebimus $s = \frac{1}{yy - xx}$, ita vt habeamus:

$$\frac{dx}{y + \mathfrak{A}x - naaxxy} = - \frac{dy}{x + \mathfrak{A}y - naaxyy} = \frac{du}{yy - xx}.$$

Hoc igitur valore ſubſtituto nanciſcimur:

$$dV = \frac{a\,(X - Y)\,du}{yy - xx} = \frac{-a\,du\,(X - Y)}{xx - yy}.$$

§. 16. Cum autem X et Y ſint functiones rationales pares ipſarum x et y, in quibus tantum inſunt poteſtates pares harum litterarum; facile intelligitur, formulam $X - Y$ ſemper eſſe diuiſibilem per $xx - yy$ et quotum praeter productum $xy = u$ inſuper inuoluere ſummam quadratorum $xx + yy$; quamobrem ſtatuamus $xx + yy = t$, et cum aequatio noſtra fundamentalis fiat

$$t - aa + 2\mathfrak{A}u - naauu = 0,$$

ex ea fit

$$t = aa - 2\mathfrak{A}u + naauu,$$

ita vt t aequetur functioni rationali ipſius u. Quod ſi ergo hic valor vbique loco t ſcribatur, differentiale noſtrum quaeſitum dV per ſolam variabilem u exprimetur, ita vt

poſito

poſito $dV = U du$ ſemper ſit U functio rationalis ipſius u, quae ergo ſi fuerit integra, tum V aequabitur functioni algebraicae ipſius u; ſin autem ſit functio fracta, tum integrale $V = \int U du$ ſemper per logarithmos et arcus circulares exhiberi poterit. Hoc ergo integrale ſi ita capiatur, vt euaneſcat poſito $u = xy = 0$, id etiam euaneſcet poſito $x = 0$ vel $y = 0$. Atque hinc integrando impetrabimus:

$$\int \frac{X dx}{\sqrt{(1 + mxx + nx^4)}} + \int \frac{Y dy}{\sqrt{(1 + myy + ny^4)}} = C + V = C + \int U du.$$

§. 17. Quod ſi igitur characteres $\Pi : x$ et $\Pi : y$ denotent valores horum integralium, ita vt vtrumque euaneſcat ſumto vel $x = 0$ vel $y = 0$, quoniam facto $x = 0$ per hypotheſin fit $y = a$, manifeſtum eſt conſtantem hanc fore $\Pi : a$, ſicque aequatio finita reſultabit iſta:

$$\Pi : x + \Pi : y = \Pi : a + \int U du.$$

§. 18. Accuratius autem in valores huius fractionis U pro quouis caſu inquiramus. Ac primo quidem, ſi ſumatur

$$Z = \alpha + \beta zz + \gamma z^4 + \delta z^6 + \text{etc.}$$

erit ſimili modo

$$X = \alpha + \beta xx + \gamma x^4 + \delta x^6 + \text{etc. et}$$

$$Y = \alpha + \beta yy + \gamma y^4 + \delta y^6 + \text{etc.},$$

quare cum inuenerimus

$$dV = U du = -\frac{a du (X - Y)}{xx - yy}, \text{ erit}$$

$$U = -\frac{a(X - Y)}{xx - yy}, \text{ ideoque}$$

$$U = -\frac{a(\beta(xx - yy) + \gamma(x^4 - y^4) + \delta(x^6 - y^6))}{xx - yy},$$

 vnde

vnde ſit

$$U = -a\beta - a\gamma(xx+yy) - a\delta(x^4+xxyy+y^4).$$

Cum igitur ſit $xx+yy=t$ et $xy=u$, erit

$$U = -a\beta - a\gamma t - a\delta(tt-uu),$$

vnde cum ſit

$$t = aa - 2\mathfrak{A}u + naauu,$$

calculo ſubducto fiet

$$\int U\,du = -a\beta u - a\gamma(aau - \mathfrak{A}uu + \tfrac{1}{3}naau^3)$$
$$- a\delta(a^4uu - 2aa\mathfrak{A}uu + \tfrac{2}{3}na^4u^3 - n\mathfrak{A}a^2u^4 + \tfrac{1}{5}n^2a^4u^5)$$
$$+ \tfrac{4}{3}\mathfrak{A}^2u^3$$
$$+ \tfrac{1}{3}u^3.$$

Atque hinc intelligitur, ſi functio Z ad altiores poteſtates exſurgat, quomodo valor integralis ipſius $\int U\,du$ inde inueniri queat.

§. 19. Sin autem Z fuerit functio fracta, ſcilicet

$$Z = \frac{\alpha+\beta zz+\gamma z^4}{\zeta+\eta zz+\theta z^4},$$ hincque

$$X = \frac{\alpha+\beta xx+\gamma x^4}{\zeta+\eta xx+\theta x^4} \text{ et } Y = \frac{\alpha+\beta yy+\gamma y^4}{\zeta+\eta yy+\theta y^4},$$ erit

$$X-Y = \frac{(\beta\zeta-\alpha\eta)(xx-yy)+(\gamma\zeta-\alpha\theta)(x^4-y^4)+(\gamma\eta-\beta\theta)x^2y^2(x^2-y^2)}{\zeta\zeta+\zeta\eta(xx+yy)+\zeta\theta(x^4+y^4)+\eta^2x^2y^2+\eta\theta x^2y^2(xx+yy)+\theta\theta x^4y^4}.$$

Hinc igitur introductis litteris t et u erit

$$\frac{X-Y}{xx-yy} = \frac{\beta\zeta-\alpha\eta+(\gamma\zeta-\alpha\theta)t+(\gamma\eta-\beta\theta)uu}{\zeta\zeta+\zeta\eta t+\zeta\theta(tt-2uu)+\eta\eta uu+\eta\theta tuu+\theta\theta u^4},$$

quam ob rem cum ſit

$$U = -\frac{a(X-Y)}{xx-yy},$$ ob

$$t = aa - 2\mathfrak{A}u + naauu,$$

manifeſtum eſt, integrale formulae $\int U\,du$ niſi fuerit algebraicum, ſemper, conceſſis logarithmis et arcubus circularibus, exhiberi poſſe. Sicque per has tres operationes omnia

prae-

praeſtitimus, quibus opus eſt ad omnia problemata huc ſpectantia ſoluenda.

Problema I.

§. 20. *Si* $\Pi : x$ *et* $\Pi : y$ *denotent valores formularum integralium*:

$$\int \frac{X\,dx}{\surd(1 + mxx + nx^4)} \quad et \quad \int \frac{Y\,dy}{\surd(1 + myy + ny^4)},$$

vbi X et Y ſint functiones pares ſimiles ipſarum x et y, atque dentur binae huiusmodi formulae $\Pi : x$ *et* $\Pi : y$; *inuenire tertiam formulam eiusdem generis* $\Pi : z$, *vt ſit* $\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + W$, *ita vt W ſit functio vel algebraica vel per logarithmos et arcus circulares aſſignabilis.*

Solutio.

Cum dentur binae quantitates x et y, ex iis formentur radicales

$$\mathfrak{X} = \surd(1 + mxx + nx^4) \text{ et } \mathfrak{Y} = \surd(1 + nyy + ny^4),$$

ex quibus definiatur quantitas z, eodem modo quo ſupra litteram a per x et y definire docuimus, ita vt ſit $z = \frac{x\mathfrak{Y} + y\mathfrak{X}}{1 - nxxyy}$ eiusque valor irrationalis

$$\mathfrak{Z} = \surd(1 + mzz + nz^4) = \frac{(mxy + \mathfrak{X}\mathfrak{Y})(1 + nxxyy) + 2nxy(xx + yy)}{(1 - nxxyy)^2},$$

tum in ſuperioribus formulis vbique loco a et $\mathfrak{A}$ ſcribamus z et Z et capiatur $= -\frac{z(X - Y)}{xx - yy}$, quam quantitatem vidimus ſemper reduci poſſe ad functionem ipſius u, exiſtente $u = xy$, ac ponatur $V = \int U\,du$, in qua integratione quantitates z et $\mathfrak{Z}$ pro conſtantibus ſunt habendae, ita vt littera V ſpectari poſſit tanquam functio ipſius $u = xy$, quandoquidem etiam z et $\mathfrak{Z}$ per x et y determinantur.

Probe

Probe autem teneatur, in iſta formula integrali ſolam quantitatem a vt variabilem eſſe tractandam. Hac igitur quantitate V inuenta erit $\Pi : x + \Pi : y = \Pi : z + V$, vnde cum debeat eſſe $\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + W$, patet eſſe $W = - V$, ideoque quantitatem vel algebraicam, vel per logarithmos et arcus circulares aſſignabilem.

Corollarium 1.

§. 21. Totum ergo negotium hic redit ad integrationem formulae $U\,du$, exiſtente $u = xy$ et $U = -\frac{z(X - Y)}{xx - yy}$, quam ſupra vidimus ſemper per u exprimi poſſe, ſiquidem in hac integratione litterae z et $\mathfrak{Z}$ vt quantitates conſtantes tractentur.

Corollarium 2.

§. 22. Cum igitur pro data indole binarum functionum X et Y haec integratio nulla laboret difficultate, ipſumque integrale per u, hoc eſt per xy exprimatur, cuius valorem ex datis quantitatibus x et y ſemper exhibere liceat, loco quantitatis V ſcribemus in poſterum characterem $\Phi : xy$, vnde pro quibusque aliis litteris loco x et y asſumtis intelligitur ſignificatus characterum $\Phi : pq$, $\Phi : ab$ etc.

Corollarium 3.

§. 33. Hoc igitur charactere recepto, ſi pro datis quantitatibus x et y capiamus $z = \frac{x\mathfrak{Y} + y\mathfrak{X}}{1 - nxxyy}$, vnde fit

$$\mathfrak{Z} = \frac{(mxy + \mathfrak{X}\mathfrak{Y})(1 + nxxyy) + 2nxy(xx + yy)}{(1 - nxxyy)^2},$$

erit $\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y - \Phi : xy$.

Pro-

Problema 2.

§. 24. *Seruatis omnibus characteribus, quos hactenus explicauimus, ſi dentur ternae formulae*, $\Pi:p$, $\Pi:q$, $\Pi:r$; *inuenire quartam eiusdem generis* $\Pi:z$, *vt fiat*

$$\Pi:z = \Pi p + \Pi:q + \Pi:r + W,$$

ita vt W *ſit quantitas algebraica, vel per logarithmos arcusue circulares aſſignabilis.*

Solutio.

Ex datis binis quantitatibus p et q, ideoque etiam $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ inde oriundis, capiatur $x = \frac{p\mathfrak{Q}+q\mathfrak{P}}{1-nppqq}$, ſimulque

$$\mathfrak{X} = \frac{(mpq+\mathfrak{P}\mathfrak{Q})(1+nppqq)+2npq(pp+qq)}{(1-nppqq)^2}.$$

Tum vero etiam colligatur valor characteris $\Phi:pq$, eritque per praecedentia

$$\Pi:x = \Pi:p + \Pi:q - \Phi:pq, \text{ ſiue}$$

$$\Pi:p + \Pi:q = \Pi:x + \Phi:pq,$$

quo valore ſubſtituto erit

$$\Pi:z = \Pi:x + \Pi:r + \Phi:pq + W.$$

Ex praecedente autem problemate, ſi loco y hic ſcribamus r et capiamus $z = \frac{x\mathfrak{R}+r\mathfrak{X}}{1-nrrxx}$, vnde fit

$$\mathfrak{Z} = \frac{mrx+\mathfrak{R}\mathfrak{X}(1+nrrxx)+2nrx(rr+xx)}{(1-nrrxx)^2}, \text{ erit}$$

$$\Pi:z = \Pi:x + \Pi:r - \Phi:rx,$$

qua forma cum praecedente collata colligitur

$$W = -\Phi:pq - \Phi:rx, \text{ ita vt ſit}$$

$$\Pi:z = \Pi:p + \Pi:q + \Pi:r - \Phi:pq - \Phi:rx.$$

Problema 3.

§. 25. *Propoſitis huiusmodi formulis*: $\Pi : p$, $\Pi : q$, $\Pi : r$, $\Pi : s$, *inuenire quintam eiusdem generis* $\Pi : z$, *vt fiat* $\Pi : z = \Pi : p + \Pi : q + \Pi : r + \Pi\, s + W$, *ita vt W ſit quantitas algebraica, vel per logarithmos arcusue circulares aſſignabilis.*

Solutio.

Ex datis binis p et q quaeratur x, vt ſit $x = \frac{p\mathfrak{Q} + q\mathfrak{P}}{1 - nppqq}$, item

$$\mathfrak{X} = \frac{(mpq + \mathfrak{P}\mathfrak{Q})(1 + nppqq) + 2npq(pp + qq)}{(1 - nppqq)^2},$$

eritque $\Pi : x = \Pi : p + \Pi : q - \Phi : pq$. Simili modo ex binis datis r et s quaeratur y, vt ſit $y = \frac{r\mathfrak{S} + s\mathfrak{R}}{1 - nrrss}$, eritque

$$\mathfrak{Y} = \frac{(mrs + \mathfrak{R}\mathfrak{S})(1 + nrrss) + 2nrs(rr + ss)}{(1 - nrrss)^2},$$

tum vero

$$\Pi : y = \Pi : r + \Pi : s - \Phi : rs.$$

Nunc denique ex inuentis x et y ſumatur $z = \frac{x\mathfrak{Y} + y\mathfrak{X}}{1 - nxxyy}$ et

$$\mathfrak{Z} = \frac{(mxy + \mathfrak{Y}\mathfrak{X})(1 + nxxyy) + 2nxy(xx + yy)}{(1 - nxxyy)^2}$$

eritque $\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y - \Phi : xy$. Quod ſi ergo loco $\Pi : x$ et $\Pi : y$ valores modo inuenti ſubſtituantur, fiet

$$\Pi : z = \Pi : p + \Pi : q + \Pi : r + \Pi : s - \Phi : pq - \Phi : rs - \Phi\, xy.$$

Corollarium 1.

§. 26. Hinc iam abunde intelligitur, ſi proponantur quotcunque huiusmodi formulae, quemadmodum nouam eiusdem generis $\Pi : z$ inueſtigari oporteat, quae ab illis iunctim ſumtis diſcrepet quantitate algebraica, vel per logarithmos arcusue circulares aſſignabili.

Corol-

Corollarium 2.

§. 27. Quod ſi omnes illae formulae fuerint inter ſe aequales earumque numerus $= \lambda$, ſemper noua formula $\Pi : z$ inueniri poterit, vt ſit $\Pi : z = \lambda \Pi : p + W$, exiſtente W quantitate vel algebraica, vel per logarithmos arcusue circulares aſſignabili. Quin etiam, duabus huiusmodi formulis $\Pi : p$ et $\Pi : q$ propoſitis, inueniri poterit $\Pi : z$, vt ſit $\Pi : z = \lambda : \Pi : p + \mu \Pi : q + W$.

Scholion.

§. 28. Hoc igitur modo non ſolum principia et fundamenta, quibus hoc argumentum innititur, ſuccincte ac dilucide mihi quidem expoſuiſſe videor: ſed hoc argumentum etiam multo latius amplificaui quam adhuc eſt factum. Semper autem maxime eſt optandum, vt via magis directa detegatur, quae ad easdem inueſtigationes perducat. Nemo enim certe dubitabit, quin hinc maxima in vniuerſam Analyſin incrementa eſſent redundatura.

Applicatio.

ad quantitates tranſcendentes in forma $\int \frac{dz(\alpha + \beta zz)}{\sqrt{(1 + mzz + nz^4)}} = \Pi : z$ contentas.

§. 29. Cum igitur hic ſit $Z = \alpha + \beta zz$, propoſitis duabus formulis huius generis $\Pi : x$ et $\Pi : y$ ſumtoque $z = \frac{x\mathfrak{Y} + y\mathfrak{X}}{1 - nxxyy}$, hincque

$$\mathfrak{Z} = \frac{(mxy + \mathfrak{X}\mathfrak{Y})(1 + nxxyy) + 2nxy(x^2 + y^2)}{(1 - nxxyy)^2},$$

ex §. 18. vbi $u = xy$ et $a = z$, erit

 $\Pi : z$

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + \beta x y z,$$

ita vt character ante adhibitus $\Phi : y$ hoc caſu accipiat valorem $\beta x y z$. Huius igitur regulae ope propoſitis duabus huiusmodi formulis $\Pi : x$ et $\Pi : y$, tertia $\Pi : z$ ſemper reperiri poteſt, quae a ſumma illarum differat quantitate algebraica $\beta x y z$.

§. 30. Ponamus igitur quotcunque huiusmodi formulas tranſcendentes proponi:

$$\Pi : a,\ \Pi : b,\ \Pi : c,\ \Pi : d,\ \Pi : e,\ \Pi : f,\ \Pi : g, \text{ etc.}$$

et ex ſingulis quantitatibus a, b, c, d, e, colligi valores irrationales litteris germanicis inſignitas:

$$\mathfrak{A} = \sqrt{(1 + m a a + n a^4)};\quad \mathfrak{B} = \sqrt{(1 + m b b + n b^4)};$$
$$\mathfrak{C} = \sqrt{(1 + m c c + n c^4)};\quad \mathfrak{D} = \sqrt{(1 + m d d + n d^4)};$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

ſemper noua formula eiusdem generis exhiberi poterit, quae a ſumma earum diſcrepet quantitate algebraica, quantuscunque etiam fuerit earum formularum datarum numerus. Operationes autem ad hunc finem perducentes commodiſſime ſequenti modo inſtituentur.

§. 31. Primo ſcilicet ex binis datarum a et b quaeratur p, vt ſit

$$p = \frac{a\mathfrak{B} + b\mathfrak{A}}{1 - n a a b b} \text{ et } \mathfrak{P} = \frac{(m a b + \mathfrak{A}\mathfrak{B})(1 + n a a b b) + 2 n a b (a a + b b)}{(1 - n a a b b)^2}.$$

Deinde ex hac quantitate p, cum datarum tertia c iuncta, definiatur q, vt ſit

$$q = \frac{p\mathfrak{C} + c\mathfrak{P}}{1 - n c c p p} \text{ et } \mathfrak{Q} = \frac{(m c p + \mathfrak{C}\mathfrak{P})(1 + n c c p p) + 2 n c p (c c + p p)}{(1 - n c c p p)^2}.$$

Tertio ex hac quantitate q cum quarta datarum d iuncta quae-

quaeratur r, vt ſit

$$r = \frac{q\mathfrak{D} + d\mathfrak{Q}}{1 - nddqq} \text{ et } \mathfrak{R} = \frac{(mdq + \mathfrak{D}\mathfrak{Q})(1 + nddqq) + 2ndq(dd + qq)}{(1 - nddqq)^2}.$$

Quarto ex iſta quantitate r cum quinta datarum e definiatur s, vt ſit

$$s = \frac{r\mathfrak{E} + e\mathfrak{R}}{1 - neerr} \text{ et } \mathfrak{S} = \frac{(mer - \mathfrak{E}\mathfrak{R})(1 + neerr) + 2ner(ee + rr)}{(1 - neerr)^2}.$$

Haeque operationes continuentur donec omnes quantitates datae in computum fuerint ductae.

§. 32. His autem omnibus valoribus inuentis, ſequentes comparationes deſideratae ordine ita ſe habebunt:

I. $\Pi : p = \Pi : a + \Pi : b + \beta abp$

II. $\Pi : q = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \beta abp$
$\qquad + \beta cpq$

III. $\Pi : r = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \beta abp$
$\qquad + \beta cpq$
$\qquad + \beta dqr$

IV. $\Pi : s = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \Pi : e + \beta abp$
$\qquad + \beta cpq$
$\qquad + \beta dqr$
$\qquad + \beta ers$

V. $\Pi : t = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \Pi : e + \Pi : f + \beta abp$
$\qquad + \beta cpq$
$\qquad + \beta dqr$
$\qquad + \beta ers$
$\qquad + \beta fst.$

etc. etc.

§. 33. Cum igitur iſta formula tranſcendens:

$\Pi : z = \int \frac{dz\,(\alpha + \beta zz)}{\sqrt{(1 + mzz + z^4)}}$,

 in

in ſe contineat arcus omnium ſectionum conicarum a vertice ſumtos, harum formularum ope, quotcunque proponantur arcus in quauis ſectione conica, qui omnes a vertice ſint ſumti, ſemper nouus in eadem ſectione conica arcus pariter a vertice abſcindi poterit, qui a ſumma illorum arcuum datorum diſcrepet quantitate algebraice aſſignabili. Quin etiam nihil impedit, quo minus aliqui inter arcus datos capiantur negatiui, quandoquidem iam annotauimus eſſe $\Pi:(-z) = -\Pi:z$, ita vt noſtra determinatio etiam accommodari poſſit ad arcus inter terminos quoscunque interceptos. Hocque modo tractatio, quam nuper circa comparationem talium arcuum dedi, multo generalior reddi poterit.

§. 34. Ceterum, quemadmodum hoc caſu, quo ſumſimus $Z = \alpha + \beta zz$, character ſupra vſurpatus $\Phi:xy$ abiit in βxyz, dum ſcilicet ex binis quantitatibus x et y, ſecundum praecepta data tertia z determinatur: ita etiam, quaecunque alia functio loco Z adhibeatur, quoniam poſuimus $\Phi:xy = a\int\frac{(X-Y)\,du}{xx-yy}$, exiſtente $u = xy$, integratione abſoluta functio inde reſultans tantum quantitatem u cum litteris a et $\mathfrak{A}$ continebit, quandoquidem littera t ita exprimebatur: $t = aa - 2\mathfrak{A}u + naauu$, cum inuento integrali vbique loco u ſcribatur xy, at vero loco a et $\mathfrak{A}$ litterae z et $\mathfrak{Z}$; atque hoc modo obtinebitur valor characteris $\Phi:xy$ pro quouis caſu propoſito, quae functio, niſi fuerit algebraica, ſemper per logarithmos et arcus circulares exhiberi poterit, ſiquidem, vti aſſumſimus, littera Z fuerit functio rationalis par ipſius z.

VBE-

VBERIOR EVOLVTIO COMPARATIONIS QVAM INTER ARCVS SECTIONVM CONICARVM INSTITVERE LICET.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Nouum ſere etiamnunc eſt argumentum et minime adhuc ſatis exploratum, quod in omni ſectione conica, ſumto pro lubitu arcu quocunque, ab alio quouis puncto eiusdem curuae ſemper arcum reſcindere liceat, qui ab illo arcu differat quantitate geometrice aſſignabili. Ita ſi in ſectione conica A B pro lubitu accipiatur arcus E F, tum ab alio quocunque puncto M ſemper reſcindi poteſt arcus M N, ita vt differentia inter arcus E F et M N, algebraice aſſignari queat: hocque adeo duplici modo praeſtare licet, prouti a puncto M arcum deſideratum vel antror- Tab. I. Fig 1.

antrorſum, vti M N, vel retrorſum, vti M n abſcindere velimus. Quod ſi ſectio conica fuerit circulus, res ex primis elementis adeo eſt manifeſta, vbi quidem differentia inter binos illos arcus neceſſario eſt nulla. Pro parabola autem idem iam dudum a *Bernoulliis* eſt oſtenſum; quandoquidem quilibet arcus parabolicus per aggregatum ex quantitate algebraica et logarithmica exprimitur. Quod vero ad Ellipſin et Hyperbolam attinet, quarum rectificationem neque per arcus circulares neque per logarithmos expedire licet, talis comparatio vires Analyſeos penitus ſuperare videbatur, donec ab Illuſtriſſimo Comite *Fagnani* prima principia fuere patefacta, quae ad hunc ſcopum deducerent, et quae deinceps accuratius ſum proſecutus, ita vt iſta inueſtigatio multo latius ſit extenſa, multoque facilius ad innumeras alias ſpeculationes accommodari queat. Interim tamen operationes, quibus hoc negotium abſoluitur, tantopere ab operationibus analyticis ſolitis recedunt, vt ad ſingulare calculi genus referendae videantur, cum nequidem veritas iſtiusmodi comparationum more ſolito per calculum oſtendi poſſit.

§. 2. Foecundiſſimum autem hoc argumentum in pluribus Diſſertationibus Commentariis Academiae Petropolitanae fuſius ſum perſecutus, atque adeo plures methodos detexi, quae ad eundem finem perducere valeant, quae autem nihilominus ita ſunt comparatae, vt tota iſta inueſtigatio adhuc penitus noua et a vulgari calculo analytico plurimum recedens habenda videatur. Huic eidem argumento etiam ſectionem peculiarem in Inſtitutionibus meis Calculi Integralis tribuendam cenſui, vbi duobus Capitibus hoc argumentum prorſus nouum a pag. 421. vsque

que ad pag. 493. ſum complexus, vnde praecipua momenta ad rectificationem ſectionum conicarum ſpectantia depromam, quae in ſequente Theoremate generali ſum comprehenſurus.

Theorema generale.

§. 3. Si character $\Pi : z$ denotet valorem formulae integralis $\int \frac{dz(L + Mzz + Nz^4)}{\sqrt{(A + Czz + Ez^4)}}$, ita ſumtum vt euaneſcat poſito $z = 0$, ſemper ternas huiusmodi formulas: $\Pi : p$, $\Pi : q$, $\Pi : r$ ita inter ſe comparare licet, vt ſit

$$\Pi : p + \Pi : q + \Pi : r$$
$$= \frac{Mpqr}{\sqrt{A}} + \frac{Npqr}{2A\sqrt{A}}(A(pp + qq + rr) - \tfrac{1}{3}Eppqqrr),$$

ſi modo inter quantitates p, q et r iſta relatio ſtabiliatur, vt ſit

$$r = \frac{-p\sqrt{(A(A + Cqq + Eq^4))} - q\sqrt{(A(A + Cpp + Ep^4))}}{A - Eppqq},$$

vnde ſimili modo patet fore

$$p = \frac{-q\sqrt{(A(A + Crr + Er^4))} - r\sqrt{(A(A + Cqq + Eq^4))}}{A - Eqqrr},$$

$$q = \frac{-p\sqrt{(A(A + Crr + Er^4))} - r\sqrt{(A(A + Cpp + Ep^4))}}{A - Epprr}.$$

Dilucidationes.

§. 4. Cum ſit $\Pi : z = \int \frac{dz(L + Mzz + Nz^4)}{\sqrt{(A + Czz + Ez^4)}}$, integrali ita ſumto, vt euaneſcat poſito $z = 0$, patet fore $\Pi : 0 = 0$; tum vero quoniam ſumto z negatiuo valor formulae integralis etiam fit negatiuus, patet fore $\Pi : (-z) = -\Pi : z$, vnde, ſi quantitatum p, q, r vna, veluti p, fuerit negatiua, tum in relatione aſſignata loco $\Pi : p$ ſcribi debet $-\Pi : p$. Ceterum manifeſtum eſt, hanc formulam integralem ma-

 xime

xime fore tranſcendentem, cum neque per logarithmos, neque per quadraturam circuli expediri poſſit, ita vt iſta quantitas $\Pi : z$ per nullas formulas in Analyſi receptas exhiberi queat. Pauciſſimi quidem caſus hinc ſunt excipiendi, quibus eſt vel $E = o$ (hoc enim caſu formula per logarithmos vel arcus circulares aſſignari poſſet, quod idem eueniret ſi eſſet $A = o$); vel quando quantitas $A + Czz + z^4$ fuerit quadratum, quo caſu iterum integratio vt ante ſuccederet; vel denique, ſi litterae L, M et N ita fuerint comparatae, vt formula propoſita algebraicum accipiat integrale, cuius forma erit $\alpha z \surd (A + Czz + Ez^4)$. Quia enim eius differentiale eſt $\frac{\alpha dz (A + 3Czz + 3Ez^4)}{\surd (A + Czz + Ez^4)}$, ſi fuerit $L = \alpha A$, $M = 2\alpha C$ et $N = 3\alpha E$, formula $\Pi : z$ vtique huic quantitati algebraicae: $\alpha z \surd (A + Czz + Ez^4)$ aequabitur.

§. 5. Quemadmodum hoc argumentum in variis diſſertationibus tractaui, in formula integrali numeratorem $L + Mzz + Nz^4$ vlterius per poteſtates pares quousque libuerit continuare licuiſſet, eius loco ponendo

$$L + Mzz + Nz^4 + Oz^6 + Pz^8 + Qz^{10} + \text{etc.}$$

verum quia quaelibet poteſtas ad binas praecedentes facile reduci poteſt, tali extenſione carere poterimus: ſemper enim ſtatui poteſt

$$\int \frac{z^{n+4} dz}{\surd (A + Czz + Ez^4)} = \alpha z^{n+1} \surd ((A + Czz + Ez^4))$$
$$+ \int \frac{dz (\mathfrak{A} z^n + \mathfrak{B} z^{n+2})}{\surd (A + Czz + Ez^4)}.$$

Erit enim

$\alpha =$

$\alpha = \frac{1}{(n+3)E}$; $\mathfrak{A} = \frac{-(n+1)A}{(n+3)E}$ et $\mathfrak{B} = \frac{-(n+2)C}{(n+3)E}$.

Hinc igitur ſumto $n = 0$ fiet

$$\int \frac{z^4\, dz}{\sqrt{(A + Czz + Ez^4)}} = \frac{1}{3E} z \sqrt{((A + Czz + Ez^4))} - \frac{1}{3E} \int \frac{(A + 2Czz)\, dz}{\sqrt{(A + Czz + Ez^4)}},$$

quamobrem hic etiam in noſtra formula integrali terminum Nz^4 omittere potuiſſemus.

§. 6. Cum igitur non obſtante tranſcendentia formulae $\Pi : z$ ternas huiusmodi formulas $\Pi : p$, $\Pi : q$ et $\Pi : r$ ſemper ita inter ſe comparare liceat, vt earum ſumma $\Pi : p + \Pi : q + \Pi : r$ aequetur quantitati algebraicae

$$\frac{Mpqr}{\sqrt{A}} + \frac{Npqr}{2A\sqrt{A}} (A(p^2 + q^2 + r^2) - \tfrac{1}{3} E p^2 q^2 r^2),$$

ſi modo inter tres quantitates p, q, r, ea relatio accipiatur, quae in theoremate eſt praeſcripta: haec relatio eo magis eſt notatu digna, quod ternae litterae p, q, r in illam formam aequaliter ingrediantur, ita vt prorſus inter ſe pro lubitu permutari queant. Cum igitur nullae adhuc huiusmodi relationes in Analyſi ſint conſideratae, haec inveſtigatio vtique maxime ardua eſt cenſenda, ac nullum eſt dubium, quin plurima inſuper myſteria analytica altioris indaginis in ſe inuoluat, quae eo magis abſcondita videntur, quod a conſuetis Analyſeos operationibus maxime recedunt.

§. 7. Ternarum autem quantitatum illarum p, q, r binas pro lubitu aſſumere licet, dummodo tertiae is valor tribuatur, qui in theoremate aſſignatus eſt, quae relatio quo concinnius exprimi queat, ſtatuamus breuitatis gratia

$$\sqrt{A(A+Cpp+Ep^4)} = P$$
$$\sqrt{A(A+Cqq+Eq^4)} = Q \text{ et}$$
$$\sqrt{A(A+Crr+Er^4)} = R,$$

tum enim, ſi binae p et q fuerint datae, erit $r = \frac{-pQ-qP}{A-Eppqq}$; ſin autem litterae p et r fuerint datae, erit $q = \frac{-pR-rP}{A-Epprr}$; ſin autem binae q et r fuerint datae, erit $p = \frac{-qR-rQ}{A-Eqqrr}$.

§. 8. Pro quouis autem horum caſuum etiam plurimum intererit valores litterarum maiuſcularum P, Q et R per binas reliquas expreſſiſſe. Ponamus igitur binas litteras p et q, ideoque etiam P et Q, eſſe datas, ita vt ſit $r = \frac{-pQ-qP}{A-Eppqq}$; vnde ſi immediate valorem ipſius R quaerere vellemus, in maximas tricas calculi illaberemur, ad quas euitandas ex tertia relatione, quaeramus valorem ipſius R, qui erit $R = \frac{-rQ-p(A-Eqqrr)}{q}$, vbi ſi loco r et rr valores ſubſtituantur et loco quadratorum P^2 et Q^2 ſui valores ſcribantur, tandem reperietur

$$R = \frac{(ACpq+PQ)(A+Eppqq)+2AAEpq(pp+qq)}{(A-Eppqq)^2}.$$

Simili modo ex datis p et r cum P et R erit

$$Q = \frac{(ACpr+PR)(A+Epprr)+2AAEpr(pp+rr)}{(A-Epprr)^2},$$

ac denique ex datis q et r cum Q et R fiet

$$P = \frac{(ACqr+QR)(A+Eqqrr)+2AAEqr(qq+rr)}{(A-Eqqrr)^2}.$$

§. 9. Cum igitur iſti valores tantopere ſint complicati, atque adeo duplicem irrationalitatem inuoluant, maxime mirum videbitur, quomodo eos in formulis differentialibus ſubſtituere, multo magis autem, quomodo inde ad formulas tractabiles atque adeo integrabiles perueniri queat. Interim tamen hae tantae difficultates haud mediocri-

diocriter ſubleuabuntur, ſi differentiale quantitatis r ex formula $r = \frac{-pQ - qP}{A - Eppqq}$ euoluamus.

§. 10. Qui labor quo facilius ſuccedat, primo tantum quantitatem p pro variabili habeamus, quandoquidem differentiale ex variabilitate ipſius q oriundum ſponte definitur. Sint igitur ſolae litterae p et P variabiles eritque

$$dr = \frac{-Qdp - qdP}{A - Eppqq} - \frac{2Epqqdp(pQ + qP)}{(A - Eppqq)^2},$$

quia igitur:

$$dP = \frac{-ACpdp + 2AEp^3dp}{\sqrt{A(A + Cpp + Ep^4)}},$$

calculo ſubducto reperietur tandem

$$dr = \frac{-dp(ACpq + PQ)(A + Eppqq) - 2AAEpqdp(pp + qq)}{(A - Eppqq)^2 P},$$

ſimilique modo ob variabilitatem ipſius q colligetur:

$$dr = \frac{-dq(ACpq + PQ)(A + Eppqq) - 2AAEpqdq(pp + qq)}{(A - Eppqq)^2 Q},$$

quae duae expreſſiones iunctim ſumtae differentiale completum quantitatis r praebebunt.

§. 11. Hic autem imprimis notari meretur, quod in vtraque formula differentiali pro dp et dq numerator prorſus idem prodierit, atque adeo ille penitus cum valore pro R ſupra inuento congruat (vide §. 8). Hoc igitur valore ſubſtituto completum differentiale quantitatis r erit

$$dr = -\frac{Rdp}{P} - \frac{Rdq}{Q}, \text{ ita vt ſit}$$

$$\frac{dr}{R} = -\frac{dp}{P} - \frac{dq}{Q}.$$

Hinc igitur loco P, Q, R ſuos valores ſubſtituendo et per $\sqrt{A}$ multiplicando, erit

$$\frac{dp}{\sqrt{(A + Cpp + Ep^4)}} + \frac{dq}{\sqrt{(A + Cqq + Eq^4)}} + \frac{dr}{\sqrt{(A + Crr + Er^4)}} = 0,$$

 vnde

vnde ſequitur fore:

$$\int\frac{dp}{\sqrt{(A+Cpp+Ep^4)}}+\int\frac{dq}{\sqrt{(A+Cqq+Eq^4)}}+\int\frac{dr}{\sqrt{(A+Crr+Er^4)}}=0,$$

ſiquidem ſingula integralia ita capiantur, vt euaneſcant poſito $p=0$, $q=0$ et $r=0$.

§. 12. Hac inſigni proprietate inuenta, inquiramus porro, quemadmodum inde principalis relatio inter formulas $\Pi:p$, $\Pi:q$ et $\Pi:r$ oſtendi queat; quod quo facilius fieri poſſit in numeratoribus formularum noſtrarum integralium ſumamus $N=0$, atque oſtendi oportebit, iſtam aequationem integralem ſemper locum habere:

$$\int\frac{dp(L+Mpp)}{P}+\int\frac{dq(L+Mqq)}{Q}+\int\frac{dr(L+Mrr)}{R}=\frac{Mpqr}{A}.$$

Quod ſi iam loco $\frac{dr}{R}$ ſcribamus $-\frac{dp}{P}-\frac{dq}{Q}$, aequatio iſta hanc induet formam:

$$M\int\frac{dp(pp-rr)}{P}+M\int\frac{dq(qq-rr)}{Q}=\frac{Mpqr}{A},$$

ſiue ad differentialia deſcendendo oſtendi debet, hanc aequationem veritati eſſe contentaneam:

$$\frac{dp(pp-rr)}{P}+\frac{dq(qq-rr)}{Q}=\frac{pqdr}{A}+\frac{prdq}{A}+\frac{qrdp}{A}.$$

Quod ſi ergo in dextra parte ſcribamus loco dr valorem $-\frac{Rdp}{P}-\frac{Rdq}{Q}$, demonſtrandum eſt fore

$$\frac{dp(pp-rr)}{P}+\frac{dq(qq-rr)}{Q}=\frac{qdp(rP-pR)}{AP}+\frac{pdq(rQ-qR)}{AQ}$$

ſiue

$$\frac{dp(App-Arr-qrP+pqR)}{AP}+\frac{dq(Aqq-Arr-prQ+pqR)}{AQ}=0.$$

§. 13. Cum igitur haec aequalitas ſubſiſtere debeat, quicunque valores binis variabilibus p et q tribuantur, neceſſe eſt vt vtraque pars ſeorſim nihilo aequetur; quocirca

circa oſtendi debet fore tam

$$App - Arr - qrP + pqR = 0$$

quam

$$Aqq - Arr - prQ + pqR = 0.$$

Harum aequationum poſterior a priore ſubtracta relinquit

$$A(pp - qq) - r(qP - pQ) = 0,$$

vbi ſi loco r valor ſubſtituatur, fit

$$A(pp - qq) + \frac{qqPP - ppQQ}{A - Eppqq} = 0.$$

Eſt vero

$$qqPP - ppQQ = (qq - pp)(AA - AEppqq),$$

vnde aequalitas manifeſto patet. Tantum igitur ſupereſt, vt veritas alterutrius doceatur. Supra autem vidimus eſſe

$$R = -\frac{rQ - p(A - Eqqrr)}{q},$$

qui valor in priore aequatione ſubſtitutus praebet,

$$-Arr - r(qP + pQ) + Eppqqrr = 0,$$

deinde vero quia

$$qP + pQ = -r(A - Eppqq),$$

hoc valore ſubſtituto reſultat

$$-Arr + rr(A - Eppqq) + Eppqqrr = 0,$$

cuius veritas eſt manifeſta.

§. 14. Hoc igitur modo ex noſtris formulis veritatem Theorematis generalis pro caſu $N = 0$ per multas quidem ambages ob oculos poſuimus. Facile autem intelligitur, ſi etiam litterae N rationem habere vellemus, demonſtrationem difficillimis calculis fore inuolutam, quos vix quisquam eſſet ſuperaturus, niſi iam ante de veritate

aſſerti

aſſerti noſtri fuiſſet conuictus. Tanto magis igitur noſtrum Theorema omni attentione et admiratione dignum eſt cenſendum, quod per conſueta Analyſeos artificia vix vlla via pateat eius demonſtrationem in genere concinnandi, multo minus has ſublimes veritates a priori inueſtigandi.

Applicatio.

ad ſectiones conicas.

Tab. I. Fig. 2. §. 15. Conſideremus igitur ſemiellipſin ACB, cuius centrum ſit in O, ac ponatur ſemiaxis transuerſus $AO = BO = a$ et ſemiaxis coniugatus $OC = c$. Tum vero ducta applicata quacunque $Zz = z$ denotet noſtra formula $\Pi : z$, arcum ellipſis AZ illi applicatae reſpondentem; vnde patet, ſi fuerit $z = 0$ fore etiam $\Pi z = 0$, at ſumta $Zz = OC = c$, erit $\Pi : c = AC$, ſcilicet quadranti elliptico aequale. Hinc autem intelligitur, eidem applicatae Zz innumerabiles reſpondere arcus ellipticos; praeter minimum enim AZ ipſi conuenient arcus $4\Pi : c + AZ$, item $8\Pi : c + AZ$, $12\Pi : c + AZ$. Praeterea vero, quia ex altera parte etiam datur talis applicata $Z'z'$, ei quoque conueniet arcus $AZ' = 2\Pi : c - AZ$; ſimilique modo etiam $6\Pi : c - AZ$, $10\Pi : c - AZ$ etc., ſicque iſta formula $\Pi : z$ erit functio infinitiformis ipſius z, ſcilicet in Ellipſi; nam in Hyperbola omnes iſti valores, praeter vnum vel duos, euadent imaginarii.

§. 16. Pro arcu igitur AZ analytice exprimendo, vocetur abſciſſa $Oz = v$ et cum ſit ex natura ellipſis $\frac{vv}{aa} + \frac{zz}{cc} = 1$, erit

$v =$

$v = \frac{a}{c}\sqrt{(cc - zz)}$, hincque

$$dv = -\frac{azdz}{c\sqrt{(cc - zz)}},$$

vnde colligitur elementum arcus AZ

$$\sqrt{(dv^2 + dz^2)} = dz\sqrt{1 + \frac{aazz}{cc(cc - zz)}} = dz\sqrt{\frac{(c^4 + (aa - cc)zz)}{cc(cc - zz)}},$$

quocirca habebimus

$$\Pi : z = \int \frac{dz\sqrt{(c^4 + (aa - cc)zz)}}{c\sqrt{(cc - zz)}}.$$

§. 17. Cum igitur in genere poſuiſſemus

$$\Pi : z = \int \frac{dz(L + Mzz + Nz^4)}{\sqrt{(A + Czz + Ez^4)}},$$

ante omnia noſtram formulam ad eandem formam reducamus, dum ſcilicet eius numeratorem et denominatorem multiplicamus per $\sqrt{(c^4 + (aa - cc)zz)}$, tum autem prodibit

$$\Pi : z = \int \frac{dz(c^4 + (aa - cc)zz)}{c\sqrt{(cc - zz)(c^4 + (aa - cc)zz)}},$$

vnde patet, pro hoc caſu fore $L = c^4$, $M = aa - cc$ et $N = 0$; deinde vero $A = c^8$, $C = c^4(aa - 2cc)$ et $E = -cc(aa - cc)$ vnde, ſi vt ſupra breuitatis gratia ponamus

$Z = \sqrt{A(A + Czz + Ez^4)}$, erit

$Z = c^5\sqrt{(cc - zz)(c^4 + (aa - cc)zz)}$.

His igitur formulis eodem modo vti conueniet, vti in genere eſt monſtratum.

§. 18. Quo has formulas concinniores reddamus, loco litterae c introducamus ſemiparametrum ellipſis, qui ſit $= b$, et cum ſit $cc = ab$, fiet primo

$$Z = a^3 bb\sqrt{b(ab - zz)(abb + (a - b)zz)},$$

hincque fiet ipſa formula

$$\Pi : z = \int \frac{dz \sqrt{(abb + (a-b)zz)}}{\sqrt{b(ab - zz)}}.$$

Praeterea vero erit $L = aabb$, $M = a(a-b)$, $A = a^4 b^4$, $C = a^3 bb(a - 2b)$ et $E = -aab(a-b)$ Loco ſemiaxis transuerſi a inſuper introducamus excentricitatem, quae ſit $= n$, et quia ex elementis conſtat eſſe $a = \frac{b}{1-nn}$, hoc valore ſubſtituto fiet

$$Z = \frac{b^5}{(1-nn)^3} \sqrt{\frac{(b^3 - b(1-nn)zz)(b^3 + bnnzz)}{1-nn}}.$$

Vel potius hanc totam reductionem a principio repetamus, et cum ſit

$$\Pi : z = \int \frac{dz \sqrt{(bb + nnzz)}}{\sqrt{(bb - (1-nn)zz)}},$$

hac ad formam generalem reducta fit

$$\Pi : z = \int \frac{dz(bb + nnzz)}{\sqrt{(bb + nnzz)(bb - (1-nn)zz)}},$$

ideoque comparatio praebet $L = bb$, $M = nn$, $N = 0$; $A = b^4$, $C = bb(2nn - 1)$ et $E = -nn(1-nn)$; tum vero erit

$$Z = bb\sqrt{((bb + nnzz)(bb - (1-nn)zz))}.$$

Atque nunc haec formula aeque valet pro omnibus ſectionibus conicis. Quando enim $n < 1$, habebitur ellipſis; caſu $n = 1$ parabola; at ſi $n > 1$ prodit hyperbola; pro circulo autem erit $n = 0$.

§. 8. Statuantur nunc ternae applicatae p, q, r indeque deriuantur valores deriuati

$$P = bb\sqrt{(bb + nnpp)(bb - (1-nn)pp)};$$
$$Q = bb\sqrt{(bb + nnqq)(bb - (1-nn)qq)};$$
$$R = bb\sqrt{(bb + nnrr)(bb - (1-nn)rr)};$$

tum

tum vero ex binis p et q tertia r ita determinetur, vt ſit

$$r = \frac{-pQ - qP}{b^4 + nn(1 - nn)ppqq}, \text{ eritque}$$

$$R = \frac{(b^6(2nn-1)pq + PQ)(b^4 + nn(1-nn)ppqq - 2b^4 nn(1-nn)pq(pp+qq)}{(b^4 + nn(1-nn)ppqq)^2}$$

quibus poſitis habebitur ſequens comparatio ternorum arcuum:

$$\Pi : p + \Pi : q + \Pi : r = \frac{nnpqr}{bb},$$

vbi binos arcus $\Pi : p$ et $\Pi : q$ pro lubitu aſſumere licet; hinc enim ſemper aſſignari poterit tertius $\Pi : r$, vt omnium ſumma fiat quantitas algebraica, dummodo notetur, horum arcuum ſemper vnum duosue fore negatiuos, cum ſit $\Pi : (-z) = -\Pi : z$.

Translatio formularum praecedentium ad alterutrum focum ſectionis conicae.

§. 20. Sit nunc F alteruter focus noſtrae ellipſis ſeu ſectionis conicae in genere, qui quidem vertici A ſit propior; atque ex elementis conſtat, poſito angulo AFZ $= \Phi$, tum fore diſtantiam $FZ = \frac{b}{1 + n \cos. \Phi}$, vnde colligitur applicata $Zz = z = \frac{b \sin. \Phi}{1 + n \cos. \Phi}$, ita vt nunc ſit arcus

$$AZ = \Pi : z = \Pi : \frac{b \sin. \Phi}{1 + n \cos. \Phi},$$

qui ergo, cum nunc ſpectetur vt functio anguli Φ, deſignetur hoc charactere: $AZ = \Gamma : \Phi$, ita vt ſit

$$\Pi : z = \Pi : \frac{b \sin. \Phi}{1 + n \cos. \Phi} = \Gamma : \Phi.$$

Videamus igitur quomodo iſte arcus per angulum Φ exprimatur; conſtat autem poſita diſtantia $FZ = v$, fore arcum $AZ = \int \surd (dv^2 + vv\, d\Phi^2)$, quare cum ſit

 $v =$

$v = \frac{b}{1 + n \cos . \Phi}$, erit

$d v = \frac{n b d \Phi \sin . \Phi}{(1 + n \cos . \Phi)^2}$, vnde fit

$d v^2 = \frac{n n b b d \Phi^2 \sin . \Phi^2}{(1 + n \cos . \Phi)^4}$, cui ſi addatur

$v v d \Phi^2 = \frac{b b d \Phi^2}{1 + n \cos . \Phi^2}$, erit ſumma

$= \frac{b b d \Phi^2 (1 + 2 n \cos . \Phi + n n)}{(1 + n \cos . \Phi)^4}$,

ſicque erit arcus

$$A Z = \Pi : z = \Gamma : \Phi = \int \frac{b d \Phi}{1 + n \cos . \Phi)^2} \surd (1 + 2 n \cos . \Phi + n n)$$
$$= b \int \frac{d \Phi \surd (1 + n n + 2 n \cos . \Phi)}{(1 + n \cos . \Phi)^2}.$$

Hinc autem porro colligetur.

$$Z = b^4 \surd \left(1 + \frac{n n \sin . \Phi^2}{(1 + n \cos . \Phi)^2}\right) \left(1 + \frac{(n n - 1) \sin . \Phi^2}{(1 + n \cos . \Phi)^2}\right),$$

ſiue

$$Z = \frac{b^4}{(1 + n \cos . \Phi)^2} \surd (1 + n n + 2 n \cos . \Phi)(+ n n + 2 n \cos . \Phi + \cos . \Phi^2)$$

ſiue

$$Z = \frac{b^4 (n + \cos . \Phi) \surd (1 + n n + 2 n \cos . \Phi}{(1 + n \cos . \Phi)^2}.$$

§. 21. Quod ſi iam in calculum introducamus ternas applicatas p, q et r, quibus reſpondeant anguli ad focum ζ, η et θ, ita vt ſit

$$p = \frac{b \sin . \zeta}{1 + n \cos . \zeta}, \quad q = \frac{b \sin . \eta}{1 + n \cos . \eta} \text{ et } r = \frac{b \cos . \theta}{1 + n \cos . \theta},$$

tum vero

$$P = \frac{b^4 (n + \cos . \zeta) \surd (1 + n n + 2 n \cos . \zeta)}{(1 + n \cos . \zeta)^2},$$
$$Q = \frac{b^4 (n + \cos . \eta) \surd (1 + n n + 2 n \cos . \eta)}{(1 + n \cos . \eta)^2},$$
$$R = \frac{b^4 (n + \cos . \theta) \surd (1 + n n + 2 n \cos . \theta)}{(1 + n \cos . \theta)^2};$$

hinc iam, ſi inter ternas applicatas p, q, r relatio ſupra indicata ſtatuatur, haec arcuum comparatio obtinebitur:

$$\Gamma : \zeta + \Gamma : \eta + \Gamma : \theta = \frac{n n b \sin . \zeta . \sin . \eta . \sin . \theta}{(1 + n \cos . \zeta)(1 + n \cos . \eta)(1 + n \cos . \theta)}.$$

§. 22.

§. 22. Relatio autem inter litteras p, q, r ſtabilienda ad noſtros angulos traducta erat

$$r(b^4 + nn(1-nn)ppqq) = -pQ - qP,$$

cuius membrum ſiniſtrum facta ſubſtitutione induet hanc formam:

$$\frac{b^5 \text{ſin.}\theta\left((1+2n(\text{coſ.}\zeta+\text{coſ.}\eta)+nn(1+4\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\eta+\text{coſ.}\zeta^2\,\text{coſ.}\eta^2)) + 2n^3\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\eta(\text{coſ.}\zeta+\text{coſ.}\eta) + n^4(\text{coſ.}\zeta^2+\text{coſ.}\eta^2-1)\right)}{(1+n\,\text{coſ.}\theta)(1+n\,\text{coſ.}\zeta)^2(1+n\,\text{coſ.}\eta)^2}$$

membrum vero dextrum ad hanc formam reducitur:

$$-\frac{b^5\,\text{ſin.}\zeta\,(n+\text{coſ.}\eta)\sqrt{(1+nn+2n\,\text{coſ.}\eta)}}{(1+n\,\text{coſ.}\zeta)(1+n\,\text{coſ.}\eta)^2} - \frac{b^5\,\text{ſin.}\eta\,(n+\text{coſ.}\zeta)\sqrt{(1+nn+2n\,\text{coſ.}\zeta)}}{(1+n\,\text{coſ.}\eta)(1+n\,\text{coſ.}\zeta)^2}.$$

Hic quidem vtrinque per b^5 diuidi poteſt, neque tamen hinc patet, quomodo angulus θ ex binis reliquis angulis ζ et η definiri queat.

Digreſſio ad Parabolam.

§. 23. Quoniam igitur non patet, quomodo in genere ex binis angulorum ζ et η tertium determinari oporteat, hanc inueſtigationem ad Parabolam transferamus, ponendo $n=1$; tum autem membrum illud ſiniſtrum abit in $\frac{\text{ſin.}\theta}{1+\text{coſ.}\theta} = \text{tang.}\frac{1}{2}\theta$: membrum autem dextrum euadit

$$-\frac{\text{ſin.}\zeta\sqrt{(2+2\,\text{coſ.}\eta)}}{(1+\text{coſ.}\zeta)(1+\text{coſ.}\eta)} - \frac{\text{ſin.}\eta\sqrt{(2+2\,\text{coſ.}\zeta)}}{(1+\text{coſ.}\zeta)(1+\text{coſ.}\eta)}$$

$$= -\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta}{\text{coſ.}\frac{1}{2}\eta} - \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\eta}{\text{coſ.}\frac{1}{2}\zeta},$$

ita vt aequatio noſtra prodierit

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\theta = -\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta}{\text{coſ.}\frac{1}{2}\eta} - \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\eta}{\text{coſ.}\frac{1}{2}\zeta} = -\frac{\text{ſin.}\frac{1}{2}\zeta - \text{ſin.}\frac{1}{2}\eta}{\text{coſ.}\frac{1}{2}\zeta\,\text{coſ.}\frac{1}{2}\eta}.$$

§. 24. Quod quo clarius appareat notetur eſſe

$$p = b \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\zeta, \quad q = b \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\eta, \quad r = b \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\theta;$$

praeterea vero

$$P = \frac{b^4}{\text{coſ. } \frac{1}{2}\zeta}, \quad Q = \frac{b^4}{\text{coſ. } \frac{1}{2}\eta}, \quad R = \frac{b^4}{\text{coſ. } \frac{1}{2}\theta}.$$

Cum igitur etiam pro hoc caſu prodeat $R = pq + PQ$ erit

$$\frac{1}{\text{coſ. } \frac{1}{2}\theta} = \frac{-1 + \text{ſin. } \frac{1}{2}\zeta \text{ ſin. } \frac{1}{2}\eta}{\text{coſ. } \frac{1}{2}\zeta \text{ coſ. } \frac{1}{2}\eta}:$$

ante autem inuenimus,

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\theta = \frac{-\text{ſin. } \frac{1}{2}\zeta - \text{ſin. } \frac{1}{2}\eta}{\text{coſ. } \frac{1}{2}\zeta \text{ coſ. } \frac{1}{2}\eta},$$

vnde haec aequatio per illam diuiſa praebet

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2}\theta = \frac{-\text{ſin } \frac{1}{2}\zeta - \text{ſin. } \frac{1}{2}\eta}{1 + \text{ſin. } \frac{1}{2}\zeta \text{ ſin. } \frac{1}{2}\eta}, \quad \text{ſiue}$$

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2}\theta + \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\zeta + \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\eta + \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\zeta \text{ ſin. } \tfrac{1}{2}\eta \text{ ſin. } \tfrac{1}{2}\theta = 0,$$

in qua aequatione terni anguli ζ, η, θ ſunt permutabiles, quemadmodum rei natura poſtulat, quae proprietas in valore primo inuento non tam erat manifeſta.

§. 25. Quod ſi ergo terni anguli ζ, η, θ, ita a ſe inuicem pendeant, vt ſit

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2}\zeta + \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\eta + \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\theta + \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\zeta \text{ ſin. } \tfrac{1}{2}\eta \text{ ſin. } \tfrac{1}{2}\theta = 0,$$

tum in parabola terni arcus his angulis ζ, η, θ reſpondentes ſemper ita erunt comparati, vt ſit

$$\Gamma : \zeta + \Gamma : \eta + \Gamma : \theta = b \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\zeta \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\eta \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\theta.$$

Hinc ſi dati fuerint bini anguli ζ et η, tertius θ ope formulae primum inuentae facillime definitur, qua erat

tang.

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\theta = \frac{-\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\zeta - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\eta}{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\zeta\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\eta},$$

quae expreſſio per meros factores ita exhiberi poteſt:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\theta = \frac{-\,2\,\text{ſin.}\,\frac{\zeta-\eta}{4}\,\text{coſ.}\,\frac{\zeta-\eta}{4}}{\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\zeta\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\eta};$$

vnde patet, ſi anguli ζ et η fuerint poſitiui, tertium θ neceſſario fieri negatiuum, ſiue arcum ipſi reſpondentem negatiue capi debere. Ceterum patet, ſi vnus horum angulorum, veluti ζ, euaneſcat, tum fore $\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\theta + \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\eta = 0$, ſiue ſummam duorum reliquorum nihilo aequari, ſiue alterum alterius fieri negatiuum.

Problema.

In quadrante Elliptico A O C, *ſumto pro lubitu arcu* A Q, *ab altero termino* C *abſcindere arcum* C R, *qui illum arcum* A Q *ſuperet quantitate algebraica.* Tab. I. Fig 3.

Solutio.

§. 26. Sint huius Ellipſis ſemiaxes vt ſupra $OA = a$ et $OC = c$, et cum ſit arcus $CR = AC - AR$, requiritur vt fiat $AC - AR - AQ$ quantitas algebraica. Ducantur ad axem OA perpendicula Qq et Rr, quae vocentur $Qq = q$ et $Rr = r$, quae reſpectu formularum ſupra inuentarum capi debent negatiua, quia arcus reſpondentes AQ et AR hic negatiue capiuntur. Cum igitur arcus $\Pi : p$ hic ſit quadrans AC, erit $p = c$ $A = c^8$, $C = c^4(aa - 2cc)$, $E = -cc(aa - cc)$; pro applicata quacunque z vero erit formula reſpondens

$$Z = c^5 \sqrt{(cc - zz)(c^4 + (aa - cc)zz)},$$

vnde

vnde pro caſu $z = c$ fiet $Z = 0$, quocirca pro praeſenti caſu, vbi $p = c$, erit $P = 0$. Deinde autem ſi loco q ibi ſcribatur $-q$, fiet

$$Q = c^5 \sqrt{(cc - qq)}\,(c^4 + (aa - cc)\,qq).$$

§. 27. Sumtis autem litteris q et r negatiuis, cum in genere inuenerimus

$$r = \frac{-pQ - qP}{A - Epp qq}, \text{ ob } p = c \text{ et } P = 0 \text{ fiet}$$

$$-r = \frac{-cQ}{A - Eppqq}, \text{ ideoque}$$

$$r = \frac{cc\sqrt{(cc - qq)}\,(c^4 + (aa - cc)\,qq)}{c^4 + (aa - cc)\,qq},$$

quo valore inuento erit differentia arcuum $CR - AQ$ ſiue

$$\Pi : c - \Pi : q - \Pi : r = \frac{M}{\sqrt{A}} \cdot pqr = \frac{aa - cc}{c^3} \cdot qr;$$

quamobrem ſi loco r valorem inuentum ſubſtituamus, habebimus

$$CR - AQ = \frac{(aa - cc)\,q\sqrt{(cc - qq)}\,(c^4 + (aa - cc)\,qq)}{c\,(c^4 + (aa - cc)\,qq)}.$$

Hic igitur quantitas q arbitrio noſtro eſt relicta, vnde arcum AQ pro lubitu aſſumere licet, hincque punctum R, ſeu applicata $Rr = r$, ita eſt determinata, vt differentia arcuum $CR - AQ$ fiat algebraica; formulae autem inuentae manifeſto reducuntur ad has ſimpliciores:

$$r = \frac{cc\sqrt{(cc - qq)}}{\sqrt{(c^4 + (aa - cc)\,qq)}},$$

et differentia arcuum

$$CR - AQ = \frac{(aa - cc)\,q\sqrt{(cc - qq)}}{c\sqrt{(c^4 + (aa - cc)\,qq)}},$$

vbi notetur eſſe arcum

$$AQ = \int \frac{dq\sqrt{(c^4 + (aa - cc)\,qq)}}{c\sqrt{(cc - qq)}}.$$

§. 28.

§. 28. Quoniam puncta Q et R inter ſe permutari poſſunt, ſiquidem eſt $CR - AQ = CQ - AR$, hanc permutabilitatem etiam valor pro r inuentus oſtendit. Sumtis enim quadratis obtinebitur iſta aequatio:

$$c^6 - c^4(qq + rr) - (aa - cc)qqrr = 0,$$

quae manifeſto reducitur ad hanc formam concinniorem:

$$(cc - qq)(cc - rr) = \frac{aaqqrr}{cc};$$

vnde ſi ſtatuamus $qr = uu$, vt ſit $qqrr = u^4$, ex hac aequatione erit

$$qq + rr = cc - \frac{(aa - cc)}{c^4} u^4,$$

quare, ſi $2qr = 2uu$ ſiue addatur ſiue ſubtrahatur, colligitur fore

$$q + r = \sqrt{cc + 2uu - \frac{(aa-cc)u^4}{c^4}} \text{ et}$$

$$q - r = \sqrt{cc - 2uu - \frac{(aa-cc)u^4}{c^4}};$$

vnde ſumto u pro lubitu ambae quantitates q et r ſimili modo exprimuntur. Hoc modo etiam facile effici poteſt, vt ambo puncta Q et R congruant; facto enim $q - r = 0$ fiet $uu = -\frac{c^4 \pm ac^3}{aa - cc}$: erit ergo vel

$$uu = \frac{c^3}{a + c}, \text{ vel } uu = -\frac{c^3}{a - c};$$

tum autem erit

$$qq = \frac{c^3}{a + c}, \text{ vel } qq = -\frac{c^3}{a - c},$$

quorum valorum poſitiuum ſumi oportet. Quia autem q ſuperare nequit c, prior tantum valor locum habere poteſt, quo eſt $qq = \frac{c^3}{a + c}$.

§. 29. Conueniant igitur ambo haec puncta in puncto U, ita vt ſit applicata $Uu = \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a+c}}$, tum vero erit Tab. I. Fig. 4.

arcuum differentia

$$CU - AU = \frac{aa-cc}{a+c} = a - c,$$

ita vt haec differentia aequetur ipſi differentiae axium O A et O C. Hinc igitur erit A O + A U = C O + C U, vbi manifeſtum eſt, ſi eſſet $a = c$, tum punctum U in medium arcus A C incidere. Ad hoc punctum U clarius intelligendum quaeramus etiam interuallum O u, et cum ſit

$$\frac{Ou^2}{aa} + \frac{Uu^2}{cc} = 1,\ \text{erit } Ou^2 = aa - \frac{aac}{a+c} = \frac{a^3}{a+c},$$

vnde patet fore $\frac{Uu}{Ou} = \frac{c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}}$, quae ergo eſt tangens anguli A O U.

§. 30. Quia in Ellipſi ambo ſemiaxes a et c ſunt permutabiles, quemadmodum arcus A Q definitur per applicatam Q $q = q$, ſimili modo permutatis axibus arcus C R definietur per applicatam R s = O r. Poſita igitur R $s = s$ erit per formulam integralem arcus

Tab. I Fig. 3.

$$CR = \int \frac{ds\sqrt{(a^4-(aa-cc)ss)}}{a\sqrt{(aa-ss)}},$$

ſicque erit

$$\int \frac{ds\sqrt{(a^4-(aa-cc)ss)}}{a\sqrt{(aa-ss)}} - \int \frac{dq\sqrt{c^4+(aa-cc)qq}}{c\sqrt{(cc-qq)}}$$
$$= \frac{(aa-cc)qr}{c^3} = \frac{(aa-cc)q\sqrt{(cc-qq)}}{c\sqrt{(c^4+(aa-cc)qq)}}.$$

Videamus igitur quomodo s ſe habeat reſpectu q; primo autem erit $\frac{ss}{aa} + \frac{rr}{cc} = 1$, vnde fit

$$ss = aa - \frac{aa}{cc}rr = \frac{a^4qq}{c^4+(aa-cc)qq},$$

conſequenter

$$c^4ss + (aa-cc)qqss - a^4qq = 0;$$

vnde patet, permutatis litteris a et c etiam permutari q et s, vti rei natura poſtulat.

§. 31.

§. 31. Hinc igitur colligimus iſtud Theorema analyticum:

Theorema.

Si capiatur $s = \frac{aaq}{\surd(c^4 + (aa-cc)qq)}$, erit differentia iſtarum formularum integralium ſemper algebraica:

$$\int \frac{ds\surd(a^4-(aa-cc)ss)}{a\surd(aa-ss)} - \int \frac{dq\surd(c^4+(aa-cc)qq)}{c\surd(cc-qq)} = \frac{(aa-cc)q\surd(cc-qq)}{c\surd(c^4+(aa-cc)qq)}.$$

§. 32. Operae igitur pretium erit per euolutionem calculi hanc egregiam reductionem oſtendiſſe. Primo igitur cum ſit

$$s = \frac{aaq}{\surd(c^4+(aa-cc)qq)}, \text{ erit}$$

$$\surd(aa-ss) = \frac{ac\surd(cc-qq)}{\surd(c^4+(aa-cc)qq)} \text{ et}$$

$$\surd(a^4-(aa-cc)ss) = \frac{aacc}{\surd(c^4+(aa-cc)qq)},$$

vnde fit pro prima formula integrali

$$\frac{\surd(a^4-(aa-cc)ss)}{a\surd(aa-ss)} = \frac{c}{\surd(cc-qq)}.$$

Deinde vero reperitur

$$ds = \frac{aac^4dq}{(c^4+(aa-cc)qq)^{\frac{3}{2}}};$$

hinc igitur formularum integralium prior erit

$$\int \frac{ds\surd(a^4-(aa-cc)ss)}{a\surd(aa-ss)} = \int \frac{aac^6dq}{c(c^4+(aa-cc)qq)^{\frac{3}{2}}\surd(cc-qq)}$$

ab hac igitur ſi ſubtrahatur altera $\int \frac{dq\surd(c^4+(aa-cc)qq)}{c\surd(cc-qq)}$; differentiam integrabilem eſſe oportet. Facta autem reductione ad communem denominatorem haec differentia fit:

$$\int \frac{(aa-cc)dq(c^6-2c^4qq-(aa-cc)q^4)}{c(c^4+(aa-cc)qq)^{\frac{3}{2}}\surd(c-q)qc}$$

cuius

cuius integrale ergo eſſe debet $\frac{(aa-cc)q\sqrt{(cc-qq)}}{c\sqrt{(c^4+(aa-cc)qq)}}$, quod tentanti mox patebit. Nullum autem eſt dubium, quin iſte caſus, ſi probe perpendatur, largum campum ſit aperturus huiusmodi inueſtigationes adcuratius excolendi.

§. 33. Solutio autem iſtius problematis elegantius ſequenti modo adornari poteſt. Cum ſit $Qq = q$, erit $Oq = \frac{a}{c}\sqrt{(cc-qq)}$, ſimilique modo ob $Rs = s$ erit $Os = \frac{c}{a}\sqrt{(aa-ss)}$; quare cum inter q et s iſta inuenta ſit aequatio:

$$s = \frac{aaq}{\sqrt{(c^4+(aa-cc)qq)}}, \text{ erit}$$

$$ccss(cc-qq) = aaqq(aa-ss) \text{ ideoque}$$

$$\frac{cs}{\sqrt{(aa-ss)}} = \frac{aq}{\sqrt{(cc-qq)}}, \text{ ſiue } \frac{cc}{a}\cdot\frac{Rs}{Os} = \frac{aa}{c}\cdot\frac{Qq}{Oq}.$$

Hinc ſi duci intelligantur rectae OQ et OR et vocentur anguli $AOQ = \Phi$ et $COR = \psi$, erit $\frac{cc}{a}\,\text{tang.}\,\psi = \frac{aa}{c}\,\text{tang.}\,\Phi$, ſiue hi anguli ita ſunt comparati, vt ſit $\text{tang.}\,\psi : \text{tang.}\,\Phi = a^3 : c^3$, ſicque ex angulo Φ pro lubitu aſſumto facile definitur augulus ψ.

§. 34. Deinde cum inuenta ſit arcuum differentia

$$CR - AQ = \frac{(aa-cc)q\sqrt{(cc-qq)}}{c\sqrt{(c^4+(aa-cc)qq)}}, \text{ ob}$$

$$\sqrt{(c^4+(aa-cc)qq)} = \frac{aaq}{s} \text{ erit}$$

$$CR - AQ = \frac{(aa-cc)s\sqrt{(cc-qq)}}{aac} = \frac{s}{c}\sqrt{(cc-qq)} - \frac{c}{aa}s\sqrt{(cc-qq)}$$

$$= \frac{s\sqrt{(cc-qq)}}{c} - \frac{q\sqrt{(aa-ss)}}{a} = qs\left(\frac{\sqrt{(cc-qq)}}{cq} - \frac{\sqrt{(aa-ss)}}{as}\right),$$

quae expreſſio ob $\text{tang.}\,\Phi = \frac{cq}{a\sqrt{(cc-qq)}}$ et $\text{tang.}\,\psi = \frac{as}{c\sqrt{(aa-ss)}}$, ad hanc formam reducitur: $qs\left(\frac{\cot.\,\Phi}{a} - \frac{\cot.\,\psi}{c}\right)$.

DE

DE NVMERO MEMORABILI, IN SVMMATIONE PROGRESSIONIS HARMONICAE NATVRALIS OCCVRRENTE.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum olim ſummationem ſeriei harmonicae

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \text{etc.}$$

tractaſſem, eius ſummam indefinitam ſequenti modo expreſſam deprehendi, vt poſito

$$s = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots\ldots + \tfrac{1}{x},$$

haec ſumma ſit

$$C + lx + \tfrac{1}{2x} - \tfrac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \tfrac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \tfrac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \tfrac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \text{etc.}$$

vbi litterae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. ſunt numeri illi *Bernoulliani* vocati, ſcilicet $\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{30}$, $\mathfrak{C} = \frac{1}{42}$, $\mathfrak{D} = \frac{1}{30}$, $\mathfrak{E} = \frac{5}{66}$,

$\mathfrak{F} = \frac{691}{2730}$, $\mathfrak{G} = \frac{7}{6}$, $\mathfrak{H} = \frac{3617}{510}$, $\mathfrak{I} = \frac{43867}{798}$, $\mathfrak{K} = \frac{174611}{330}$, $\mathfrak{L} = \frac{854513}{138}$, $\mathfrak{M} = \frac{236364091}{2730}$, $\mathfrak{N} = \frac{8553103}{6}$, $\mathfrak{O} = \frac{23749461029}{870}$, $\mathfrak{P} = \frac{8615841276005}{14322}$, etc. tum vero lx denotat logarithmum hyperbolicum numeri x, at littera C, quae per integrationem eſt ingreſſa, eſt certus numerus determinatus ex quouis caſu particulari eruendus, quem ex caſu $x = 10$ inueni eſſe:

$$C = 0,5772156649015325,$$

qui numerus eo magis notatu dignus videtur, quod eum nullo adhuc modo ad quampiam menſuram cognitam reuocare mihi quidem licuit.

§. 2. Quod ſi ergo numerus x accipiatur infinite magnus, tum erit

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{x} = C + lx,$$

vnde ſuſpicari licet, iſtum numerum C eſſe logarithmum hyperbolicum cuiuspiam numeri notabilis, quem ſtatuamus $= N$, ita vt ſit $C = lN$, et ſumma illus ſeriei infinitae aequetur logarithmo numeri Nx, vnde operae pretium erit in valorem huius numeri N inquirere, quem quidem ſufficiet ad quinque vel ſex figuras decimales definiuiſſe, quoniam hinc non difficulter iudicari poterit, num cum quopiam numero cognito conueniat nec ne. Quo igitur hoc facilius praeſtari poſſit quaeramus numerum quempiam ſimpliciorem, cuius logarithmus parum a C diſcrepet; talis autem deprehenditur $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$, quippe cuius logarithmus eſt $= 0,58778$ aliquanto maior quam C, vnde concludimus fore $N < \frac{9}{5}$. Statuamus ergo $N = \frac{9}{5} - \omega$, et cum in genere ſit

$l(a-\omega)$

$$l(a-\omega) = l\,a - \frac{\omega}{a} - \frac{\omega^2}{2a^2} - \frac{\omega^3}{3a^3} - \frac{\omega^4}{4a^4} - \text{etc.}$$

hoc caſu erit $a = \frac{9}{5}$ hincque $\frac{\omega}{a} = \frac{5\omega}{9}$, pro quo ſcribamus z, vt fiat $\omega = \frac{9}{5}z$; erit ergo

$$l(\tfrac{9}{5}-\omega) = l\tfrac{9}{5} - z - \tfrac{1}{2}zz - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 - \text{etc.} = l\,\text{N} = \text{C}.$$

Quia igitur eſt $l\frac{9}{5} - \text{C} = 0,01057$, erit

$$z + \tfrac{1}{2}zz + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{4}z^4 + \text{etc.} = 0,01057,$$

Cum igitur ſit $z < 0,01057$, ſumamus $z = 0,01000 + y$, erit $zz = 0,0001 + 0,02.y$, id quod pro noſtro ſcopo ſufficit. His autem valoribus ſubſtitutis prodibit

$$0,01005 + 1,01000.y = 0,01057;$$

vnde deducitur $y = 0,00052$, ideoque $z = 0,01052$; hinc igitur $\omega = 0,01894$, conſequenter numerus quaeſitus $\text{N} = 1,78106$. Totum igitur negotium huc redit, vt inveſtigetur num forte iſte numerus N ad quampiam quantitatem cognitam aſſignabilem teneat rationem.

§. 3. Quoniam autem illum valorem litterae C ex ſerie, in qua nullus certus ordo elucet, propterea quod numeri *Bernoulliani* ſecundum legem maxime perplexam progrediuntur, deduxi; haud inutile erit, in ſeriem magis regularem inquirere, cuius ſumma ipſi numero C aequalis ſit futura, et quae etiam maxime conuergat, vt eius valor etiam hinc definiri poſſit, id quo eo magis neceſſarium videtur, quoniam numeri *Bernoulliani* mox adeo increſcunt, vt in ſeriem maxime diuergentem abeant, ideoque dubium merito oriri poſſit, vtrum valor inuentus pro ſatis certo haberi queat nec ne.

§. 4.

§. 4. Cum igitur numerus propoſitus C reuera aequetur iſti formulae:

$$1 + + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots \tfrac{1}{x} - l\,x,$$

denotante x numerum infinitum, haud difficulter perſpicitur, hinc ſequentem ſeriem conficere poſſe:

$$\begin{aligned} C = 1 &+ \tfrac{1}{2} - l\tfrac{2}{1} \\ &+ \tfrac{1}{3} - l\tfrac{3}{2} \\ &+ \tfrac{1}{4} - l\tfrac{4}{3} \\ &+ \tfrac{1}{5} - l\tfrac{5}{4} \\ &+ \tfrac{1}{6} - l\tfrac{6}{5} \\ &+ \tfrac{1}{7} - l\tfrac{7}{6} \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Manifeſtum enim eſt his omnibus terminis in vnam ſummam collectis ipſam prodire formulam

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{x} - l\,x.$$

Sicque habemus ſeriem infinitam noſtro numero C aequalem, cuius quilibet terminus in genere erit $\frac{1}{n} - l\frac{n}{n-1}$, quae formula erit quaſi terminus generalis ſeriei inuentae.

§. 5. Perpendamus igitur accuratius iſtam formulam $\frac{1}{n} - l\frac{n}{n-1}$, et cum ſit

$$-l\frac{n}{n-1} = l\frac{n-1}{n} = l\left(1 - \tfrac{1}{n}\right),$$

per ſeriem infinitam erit

$$-l\frac{n}{n-1} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5} - \text{etc.}$$

ideoque

$$\frac{1}{n} - l\frac{n}{n-1} = -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5} - \text{etc.},$$

vnde pro numero C inueniendo euolui oportebit ſequentem ſeriem:

1 − C

$$1 - C = +\frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \frac{1}{5.2^5} + \text{etc.}$$
$$+\frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{4.3^4} + \frac{1}{5.3^5} + \text{etc.}$$
$$+\frac{1}{2.4^2} + \frac{1}{3.4^3} + \frac{1}{4.4^4} + \frac{1}{5.4^5} + \text{etc.}$$
$$+\frac{1}{2.5^2} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{4.5^4} + \frac{1}{5.5^5} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

§. 6. Deſignet nobis breuitatis gratia α ſummam ſeriei reciprocae quadratorum

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \text{ etc.},$$

ſimilique modo β ſummam ſeriei reciprocae cuborum, δ ſummam ſeriei reciprocae biquadratorum etc., atque valores numericos harum litterarum iam olim ſatis exactos (V. Inſtit. Calculi differentialis pag. 456.) exhibui: inde igitur erit

$$1 - C = \tfrac{1}{2}(\alpha - 1) + \tfrac{1}{3}(\beta - 1) + \tfrac{1}{4}(\gamma - 1) + \tfrac{1}{5}(\delta - 1) + \tfrac{1}{6}(\varepsilon - 1) + \text{etc.}$$

Eſt vero

$$\tfrac{1}{2}(\alpha - 1) = 0,3224670$$
$$\tfrac{1}{3}(\beta - 1) = 0,0673523$$
$$\tfrac{1}{4}(\gamma - 1) = 0,0205808$$
$$\tfrac{1}{5}(\delta - 1) = 0,0073855$$
$$\tfrac{1}{6}(\varepsilon - 1) = 0,0028905$$
$$\tfrac{1}{7}(\zeta - 1) = 0,0011927$$
$$\tfrac{1}{8}(\eta - 1) = 0,0005097$$
$$\tfrac{1}{9}(\theta - 1) = 0,0002231$$
$$\tfrac{1}{10}(\iota - 1) = 0,0000994$$
$$\tfrac{1}{11}(\kappa - 1) = 0,0000449$$
$$\tfrac{1}{12}(\lambda - 1) = 0,0000205$$
$$\tfrac{1}{13}(\mu - 1) = 0,0000094$$

$$\tfrac{1}{14}(\nu - 1) = 0,0000044$$
$$\tfrac{1}{15}(\xi - 1) = 0,0000020$$
$$\tfrac{1}{16}(o - 1) = 0,0000009$$

$$1 - C = 0,4227831.$$

vnde prodiret $C = 0,5772169$, qui valor autem ob terminos ſeriei ſequentes neglectos diminui debet ad $0,5772164$, vbi in vltima figura tantum octo vnitatibus aberratur.

§. 7. Pro eodem autem valore accuratius inueſtigando ſeries multo magis conuergens inueniri poteſt. Cum enim ſit

$$l\frac{a+1}{a-1} = \frac{2}{a} + \frac{2}{3a^3} + \frac{2}{5a^5} + \frac{2}{7a^7} + \frac{2}{9a^9} + \text{etc.}$$

ob $l\frac{n}{n-1} = l\frac{2n}{2n-2}$, ſumatur $a = 2n - 1$ et erit

$$l\frac{n}{n-1} = \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{3(2n-1)^3} + \frac{2}{5(2n-1)^5} + \frac{2}{7(2n-1)^7} + \text{etc.}$$

a quo ſi fractio $\frac{1}{n}$ aufferatur, prodibit terminus generalis noſtrae ſeriei

$$l\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(2n-1)} + \frac{2}{3(2n-1)^3} + \frac{2}{5(2n-1)^5} + \frac{2}{7(2n-1)^7} + \text{etc.}$$

Quod ſi ergo loco n ſucceſſiue ſcribantur numeri 2, 3, 4, 5, etc. ſequens orietur ſeries:

$$\begin{aligned}1 - C = &+ \frac{1}{2.3} + \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} + \frac{2}{7.3^7} + \frac{2}{9.3^9} + \text{etc.}\\
&+ \frac{1}{3.5} + \frac{2}{3.5^3} + \frac{2}{5.5^5} + \frac{2}{7.5^7} + \frac{2}{9.5^9} + \text{etc.}\\
&+ \frac{1}{4.7} + \frac{2}{3.7^3} + \frac{2}{5.7^5} + \frac{2}{7.7^7} + \frac{2}{9.7^9} + \text{etc.}\\
&+ \frac{1}{5.9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \frac{2}{7.9^7} + \frac{2}{9.9^9} + \text{etc.}\\
&\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

vbi prima linea verticalis, ob $\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n}$, reducitur ad hanc ſeriem:

$\frac{2}{3}$ —

$\frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \frac{2}{7} - \frac{2}{8} +$ etc.

cuius ſumma manifeſto eſt $2\,l\,2 - 1$, qua ſumma ad alteram partem translata fiet nunc

$$2 - 2\,l\,2 - C = \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} + \frac{2}{7.3^7} + \frac{2}{9.3^9} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{2}{3.5^3} + \frac{2}{5.5^5} + \frac{2}{7.5^7} + \frac{2}{9.5^9} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{2}{3.7^3} + \frac{2}{5.7^5} + \frac{2}{7.7^7} + \frac{2}{9.7^9} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \frac{2}{7.9^7} + \frac{2}{9.9^9} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Haec ſeries tantopere conuergit, vt eius ſumma facile ad multo plures figuras expediri poſſet quam ante. Hic autem notetur primae ſeriei ſummam eſſe $l\,2 - \frac{2}{3}$; ſimilique modo ſecundae ſeriei ſumma erit $l\,\frac{3}{2} - \frac{2}{5}$, tertiae autem ſeriei ſumma $= l\,\frac{4}{3} - \frac{2}{7}$, ſequentis ſeriei ſumma $= l\,\frac{5}{4} - \frac{2}{9}$, ſequentis $= l\,\frac{6}{5} - \frac{2}{11}$, qui ergo valores ſeorſim computentur. His igitur valoribus, qui in tabulis reperiuntur collectis, ſupereſt vt ſequentes ſeries in vnam ſummam colligantur:

$$+ \tfrac{2}{3}\left(\frac{1}{13^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{2}{5}\left(\frac{1}{13^5} + \frac{1}{15^5} + \frac{1}{17^5} + \frac{1}{19^5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{2}{7}\left(\frac{1}{13^7} + \frac{1}{15^7} + \frac{1}{17^7} + \frac{1}{19^7} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{2}{9}\left(\frac{1}{13^9} + \frac{1}{15^9} + \frac{1}{17^9} + \frac{1}{19^9} + \text{etc.}\right)$$

id quod per praecepta, quae olim de ſummatione talium ſerierum dedi, haud difficulter praeſtabitur.

§. 8. Quoniam autem de vero valore noſtri numeri $C = 0,5772156649015325$, iam vsque ad 16 figuras decimales certi ſumus, ſuperfluum foret iſtum labo-

rem denuo ſuſcipere, vnde alias ſeries magis regulares expendamus, quarum ſumma huic numero aequetur. Ac primo quidem ſimpliciſſima ſeries hoc praeſtans ex forma principali

$$C = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{x} - l\,x,$$

par hanc reſolutionem deducitur:

$$\begin{aligned} C = {} & 1 - l\,2 \\ & + \tfrac{1}{2} - l\,\tfrac{3}{2} \\ & + \tfrac{1}{3} - l\,\tfrac{4}{3} \\ & + \tfrac{1}{4} - l\,\tfrac{5}{4} \\ & + \cdots \\ & \quad \cdots \\ & + \tfrac{1}{n} - l\,\tfrac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

His enim actu collectis vsque ad $\frac{1}{x}$ prodit ſumma

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{x} - l\,(x+1),$$

quia vero $l\,x$ ſupponitur infinitus $l\,(x+1)$ a $l\,x$ non diſcrepare eſt cenſendus.

§. 9. Cum igitur per ſeriem infinitam ſit $l\,\frac{n+1}{n}$ $= l\,1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{5n^5} - \text{etc.}$
erit terminus generalis illius ſeriei

$$= \tfrac{1}{2n^2} - \tfrac{1}{3n^3} + \tfrac{1}{4n^4} - \tfrac{1}{5n^5} + \text{etc.}$$

vnde noſter numerus C ſequenti ſerie exprimetur:

$$\begin{aligned} C = {} & \tfrac{1}{2.1^2} - \tfrac{1}{3.1^3} + \tfrac{1}{4.1^4} - \tfrac{1}{5.1^5} + \text{etc.} \\ & + \tfrac{1}{2.2^2} - \tfrac{1}{3.2^3} + \tfrac{1}{4.2^4} - \tfrac{1}{5.2^5} + \text{etc.} \\ & + \tfrac{1}{2.3^2} - \tfrac{1}{3.3^3} + \tfrac{1}{4.3^4} - \tfrac{1}{5.3^5} + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2.4^2}-\frac{1}{3.4^3}+\frac{1}{4.4^4}-\frac{1}{5.4^5}+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{2.5^2}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{4.5^4}-\frac{1}{5.5^5}+\text{etc.}$$
etc.

§. 10. Quod ſi iam vt ſupra litterae α, β, γ, δ etc. denotent ſummas ſerierum reciprocarum quadratorum, cuborum, biquadratorum et altiorum poteſtatum, per eas noſter numerus C ita exprimetur:

$$C = \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{4}\gamma - \tfrac{1}{5}\delta + \tfrac{1}{6}\varepsilon - \tfrac{1}{7}\zeta + \text{etc.}$$

Supra autem iam inuenimus hanc ſeriem easdem litteras inuoluentem:

$$1 - C = \tfrac{1}{2}(\alpha - 1) + \tfrac{1}{3}(\beta - 1) + \tfrac{1}{4}(\gamma - 1) + \tfrac{1}{5}(\delta - 1) + \text{etc.}$$

quae ambae ſeries eo magis ſunt notatu dignae, quod diverſo modo per easdem litteras α, β, γ, δ, valorem ipſius C exhibeant.

§. 11. Variis igitur modis hae duae ſeries inuicem combinari poterunt, vnde concluſiones omni attentione dignas deriuare licebit. Ac primo quidem illae ſeries inuicem additae producent ſequentem ſummationem:

$$1 = \alpha - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}, + \tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}, + \tfrac{1}{3}\varepsilon - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7}, + \tfrac{1}{4}\eta - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9}, + \text{etc.}$$

vbi tantum ſummae poteſtatum parium occurrunt, quae, vti inueni, per poteſtates peripheriae circuli π exhiberi poſſunt, cum ſit

$$\alpha = \tfrac{\pi^2}{6},\ \gamma = \tfrac{\pi^4}{90},\ \varepsilon = \tfrac{\pi^6}{954},\ \eta = \tfrac{\pi^8}{9450},\ \iota = \tfrac{\pi^{10}}{93555},\ \text{etc.}$$

Quare cum iſtius ſeriei prorſus ſingularis ſumma ſit $= 1$, operae pretium erit, primores ſaltem terminos per fractiones decimales euoluere. Erit igitur

 $\alpha-$

$$\alpha - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = 0,8116007335$$
$$\tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} = 0,0911616168$$
$$\tfrac{1}{3}\varepsilon - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} = 0,0295905446$$
$$\tfrac{1}{4}\eta - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9} = 0,0149082279$$
$$\tfrac{1}{5}\iota - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{11} = 0,0092898241$$

quorum quinque terminorum ſumma iam eſt

$$= 0,9565509469,$$

ita vt reliquorum omnium ſumma producere debeat

$$0,0434490531.$$

§. 12. Haec ſummatio eo magis eſt memorabilis, quod nullae adhuc huiusmodi ſeries in Analyſi ſint conſideratae. Hic autem probe notari neceſſe eſt, terminos iſtius ſeriei ita diſponi debere, quemadmodum ex combinatione binarum praecedentium ſerierum ſunt nati, ita vt ſinguli termini ex tribus conſtent partibus. Si enim verbi gratia omnes partes negatiuas ad ſiniſtram transponere vellemus, prodiret hac aequatio:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \text{etc.} = \alpha + \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{4}\eta + \tfrac{1}{5}\iota + \text{etc.}$$

vnde nihil plane cognoſcere liceret, propterea quod ex vtraque parte haberetur quantitas infinita; vbi quoniam primi termini ſerierum α, γ, ε, etc. ſunt vnitates, ex his ſolis pro dextra parte oritur ſeries

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{etc.},$$

quae ipſa ſeries ad ſiniſtram reperitur. Neque tamen hinc ſequitur reliquos terminos dextri membri nihilo fore aequales, quoniam manifeſto ſeries ad ſiniſtram poſita duplo plures continet terminos quam occurrunt in parte dextra.

§ 13. Nunc etiam ambas ſeries pro C et $1 - C$ ſupra §. 10. expoſitas alteram ab altera ſubtrahamus, ac prodibit ſequens ſeries non minus notatu digna:

$$2C - 1 = + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3}\beta, + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{5}\delta, + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{2}{7}\zeta, + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{2}{9}\theta, + \text{etc.}$$

vbi tantum ſummae poteſtatum imparium occurrunt. Novimus autem eſſe

$$2C - 1 = 0,1544313298.$$

Videamus igitur quinam valores numerici ex quinque primoribus terminis naſcantur, et cum ſit

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3}\beta = 0,0319620645$$
$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{5}\delta = 0,0352288980$$
$$\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{2}{7}\zeta = 0,0214240158$$
$$\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{2}{9}\theta = 0,0134425793$$
$$\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{2}{11}\varkappa = 0,0090010567$$

quoniam horum quinque terminorum ſumma tantum eſt 0,1110586143, haec ſeries neutiquam apta eſt cenſenda ad verum valorem ipſius C explorandum, ſiquidem adhuc eſſet incognitus.

§. 14. Ad hunc modum etiam euoluamus expreſſionem §. 7. inuentam, quae ſecundum lineas verticales hoc modo repraeſentetur:

$$\begin{aligned} 2 - 2\,l\,2 - C = & + \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{5^3} + \tfrac{1}{7^3} + \tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{11^3} + \text{etc}\right) \\ & + \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{5^5} + \tfrac{1}{7^5} + \tfrac{1}{9^5} + \tfrac{1}{11^5} + \text{etc.}\right) \\ & + \tfrac{2}{7}\left(\tfrac{1}{3^7} + \tfrac{1}{5^7} + \tfrac{1}{7^7} + \tfrac{1}{9^7} + \tfrac{1}{11^7} + \text{etc.}\right) \\ & + \tfrac{2}{9}\left(\tfrac{1}{3^9} + \tfrac{1}{5^9} + \tfrac{1}{7^9} + \tfrac{1}{9^9} + \tfrac{1}{11^9} + \text{etc.}\right) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

vbi

vbi cum tantum poteſtates impares numerorum imparium occurrant, hae ſeries per litteras ſupra aſſumtas β, δ, ζ, θ etc. exprimantur, quandoquidem nouimus eſſe.

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \text{etc.} = \frac{7}{8}\beta$$
$$1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} + \text{etc.} = \frac{31}{32}\delta$$
$$1 + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} + \text{etc.} = \frac{127}{128}\zeta$$
$$1 + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} + \frac{1}{7^9} + \frac{1}{9^9} + \text{etc.} = \frac{511}{512}\theta$$
$$\text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.}$$

His igitur valoribus ſubſtitutis habebimus hanc ſeriem:

$$2 - 2l2 - C = \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}\beta - \frac{2}{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{31}{32}\delta - \frac{2}{5} + \frac{2}{7}\cdot\frac{127}{128}\zeta - \frac{2}{7} + \frac{2}{9}\cdot\frac{511}{512}\theta - \frac{2}{9} + \text{etc.}$$

Modo ante autem inuenimus eſſe

$$2C - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\beta, + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\delta, + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{2}{7}\zeta, + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{2}{9}\theta, + \text{etc.}$$

quae ſeries ad modo inuentam addita praebet

$$1 - 2l2 + C = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3.2^3}\beta, + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{2}{5.2^5}\delta, + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{2}{7.2^7}\zeta + \text{etc.}$$

vbi omnes fractiones abſolutae conſtituunt hanc ſeriem:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \text{etc.}$$

cuius ſumma quia eſt finita $= 1 - l2$, eius loco tuto hunc valorem ſcribere licet, hincque peruenietur ad ſequentem ſummationem:

$$l2 - C = \frac{1}{3.2^2}\beta + \frac{1}{5.2^4}\delta + \frac{1}{7.2^6}\zeta + \frac{1}{9.2^8}\theta + \text{etc.}$$

quae ſeries tantopere conuergit, vt ex ea haud difficulter valor noſtri numeri C elici queat.

§. 15. Operae pretium igitur erit hanc ſeriem accuratius euoluere; quod quo facilius fieri poſſit, quia omnes litterae β, δ, ζ, θ, etc. vnitatem continent: hac vni-

vnitates ſeorſim ſumtae praebent hanc ſeriem:

$$\frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{5.2^4} + \frac{1}{7.2^6} + \frac{1}{9.2^8} + \text{etc.}$$

cuius ſumma eſt $l\,3 - 1$, quo valore hic introducto erit

$$1 - l\tfrac{3}{2} - C = \frac{1}{3.2^2}(\beta - 1) + \frac{1}{5.2^4}(\delta - 1) + \frac{1}{7.2^6}(\zeta - 1) + \frac{1}{9.2^8}(\theta - 1) + \text{etc.}$$

Hic pro parte ſiniſtra eſt

$$1 - l\tfrac{3}{2} = 0,5945348918918356;$$

pro parte dextra autem valores ſingulorum terminorum reperiuntur ſequentes:

$$\frac{1}{3.4}(\beta - 1) = 0,0168380752632995$$
$$\frac{1}{5.4^2}(\delta - 1) = 0,0004615969388358$$
$$\frac{1}{7.4^3}(\zeta - 1) = 0,0000186367798808$$
$$\frac{1}{9.4^4}(\theta - 1) = 0,0000008716982752$$
$$\frac{1}{11.4^5}(\varkappa - 1) = 0,0000000438732781$$
$$\frac{1}{13.4^6}(\mu - 1) = 0,0000000023047504$$
$$\frac{1}{15.4^7}(\xi - 1) = 0,0000000001244638$$
$$\frac{1}{17.4^8}(\pi - 1) = 0,0000000000068551$$
$$\frac{1}{19.4^9}(\sigma - 1) = 0,0000000000003831$$
$$\text{Pro reliquis} \quad 0,0000000000000225$$

$$\text{Summa} = 0,0173192269900443$$
$$1 - l\tfrac{3}{2} = 0,5945348918918356$$

$$C = 0,5772156649017913$$

qui valor olim inuento, ob leuiſſimos errores non euitandos, conformis eſt cenſendus.

§. 16. Praeter has autem ſeries, quas pro determinando numero C hactenus dedimus, innumerabiles alias reperire licet. Cum enim in genere ſtatui poſſit

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{x+p} - l(x+q),$$

quia numerus x infinite magnus aſſumi debet, ſemper idem valor hinc reſultabit, quicunque numeri loco p et q, modo ſint finiti, accipiantur. Quod ſi iam breuitatis gratia ponamus

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{p} = \Pi, \text{ erit}$$

$$C = \Pi + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{2+p} + \frac{1}{3+p} + \ldots + \frac{1}{x+p} - l(x+q).$$

Haec iam forma in ſequentem ſeriem reſolui poteſt

$$\begin{aligned} \Pi - l\,q &+ \frac{1}{1+p} - l\frac{q+1}{q} \\ &+ \frac{1}{2+p} - l\frac{q+2}{q+1} \\ &+ \frac{1}{3+p} - l\frac{q+3}{q+2} \\ &\;\; - \, - \qquad - \, - \\ &\;\; - \, - \qquad - \, - \\ &+ \frac{1}{n+p} - l\frac{q+n}{q+n-1} \end{aligned}$$

vnde igitur innumerabiles diuerſas ſeries infinitas exhibere licet, quarum omnium ſumma eadem eſt, ſcilicet $= C$.

§. 17. Quo autem hae ſeries magis conuergant, talem relationem inter q et p aſſumi conueniet, vt, quando $l\frac{q+n}{q+n-1}$ in ſeriem reſoluitur, eius primus terminus aequalis euadat ipſi $\frac{1}{n+p}$. Tres autem habentur potiſſimum modi hunc logarithmum in ſeriem conuertendi; primus oritur ex ſerie generali

$$l(1+z) = z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \text{etc.}$$

vb

vbi poſito $1 + z = \frac{q+n}{q+n-1}$, fit $z = \frac{1}{q+n-1}$; hoc ergo caſu ſumi conueniet $p = q - 1$. Sin autem hac reſolutione vti velimus:

$$l\frac{1}{1-z} = z + \tfrac{1}{2}zz + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{4}z^4 + \text{etc.},$$

facto $\frac{1}{1-z} = \frac{q+n}{q+n-1}$, fit $z = \frac{1}{q+n}$, quo ergo caſu capi debebit $p = q$. Tertius modus deſumitur ex hac reſolutione:

$$l\frac{1+z}{1-z} = 2z + \tfrac{2}{3}z^3 + \tfrac{2}{5}z^5 + \tfrac{2}{7}z^7 + \text{etc.}$$

poſito igitur $\frac{1+z}{1-z} = \frac{q+n}{q+n-1}$ erit $z = \frac{1}{2(q+n)-1}$, quo caſu capi debet $p = q - \frac{1}{2}$. Hoc igitur caſu, vt p fiat numerus integer, pro q fractio aſſumi debet formae $m + \frac{1}{2}$, tum enim fiet $p = m$. At ſi q fuerit numerus integer, p vtique erit fractio $= q - \frac{1}{2}$; cum autem valor ipſius Π hoc caſu non pateat, eum ante omnia inueſtigari oportet.

§. 18. Hunc in finem conſideremus ſequentem ſeriem cum ſuis indicibus:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1, & 1+\frac{1}{2}, & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}, \end{array}$$

vbi indici generali n reſpondebit terminus

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{n},$$

qui ſi dicatur $= N$, erunt ſequentes termini, indicibus $n+1$, $n+2$, $n+3$ reſpondentes iſti: $N + \frac{1}{n+1}$, $N + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$, $N + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}$, vbi ergo nulla difficultas occurrit, quoties n fuerit numerus integer. Ponamus igitur indici $\frac{1}{2}$ reſpondere terminum z, quippe ad cuius inuentionem praeſens inſtitutum reducitur, qui ſi fuerit inuentus, ſequentes termini hoc modo progredientur:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2} & 2+\frac{1}{2} & 3+\frac{1}{2} \\ z, & z+\frac{2}{3}, & z+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}, & z+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}; \end{array}$$

ſicque in genere indici $n+\frac{1}{2}$ reſpondebit terminus,

$$z+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\ldots\ldots\frac{2}{2n+1}.$$

Quare ſi numerus n capiatur infinite magnus, quo caſu termini indicibus n et $n+1$ reſpondentes non amplius a ſe inuicem diſcrepant, iis etiam terminus medius, indici $n+\frac{1}{2}$ reſpondens, aequalis fieri debet, atque ex hoc principio ſequens aequatio conficitur:

$$z+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}+\ldots+\frac{2}{2n+1}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n},$$

vbi ex vtraque parte terminorum numerus eſt idem, vnde ſingulis terminis a ſiniſtra ad dextram translatis et debite interpolatis prodibit

$$z=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{2}{7}+\frac{1}{4}-\frac{2}{9}+\frac{1}{5}-\frac{2}{11}+\text{etc.}$$

in infinitum, ſicque valor ipſius z per hanc ſeriem infinitam exprimitur, ex qua, cum ſit

$$\frac{1}{2}z=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\text{etc.}$$

manifeſto erit $\frac{1}{2}z=1-l\,2$, ideoque $z=2-2\,l\,2$.

§. 19. Quod ſi igitur p fuerit fractio formae $n+\frac{1}{2}$, reſpondentes valores litterae Π ſequenti modo ſe habebunt:

p	Π
$\frac{1}{2}$	$2 - 2\,l\,2$
$1 + \frac{1}{2}$	$2 - 2\,l\,2 + \frac{2}{3}$
$2 + \frac{1}{2}$	$2 - 2\,l\,2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$
$3 + \frac{1}{2}$	$2 - 2\,l\,2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7}$
etc.	etc.
$m + \frac{1}{2}$	$2 - 2\,l\,2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \ldots \ldots \frac{2}{2m+1}$.

§. 20. Vtamur reſolutione ſecunda logarithmorum, vbi erat $p = q$ et

$$l\frac{n+q}{n+q-1} = \frac{1}{n+q} + \frac{1}{2(n+q)^2} + \frac{1}{3(n+q)^3} + \frac{1}{4(n+q)^4} + \text{etc.}$$

vnde pro noſtro numero C nanciſcimur hanc ſeriem:

$$\begin{aligned} \Pi - lq &- \frac{1}{2(q+1)^2} - \frac{1}{3(q+1)^3} - \frac{1}{4(q+1)^4} - \frac{1}{5(q+1)^5} - \text{etc.} \\ &- \frac{1}{2(q+2)^2} - \frac{1}{3(q+2)^3} - \frac{1}{4(q+2)^4} - \frac{1}{5(q+2)^5} - \text{etc.} \\ &- \frac{1}{2(q+3)^2} - \frac{1}{3(q+3)^3} - \frac{1}{4(q+3)^4} - \frac{1}{5(q+3)^5} - \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

vbi eſt

$$\Pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \ldots + \frac{1}{q},$$

vnde patet, quo maior numerus q accipiatur, hanc ſeriem eo magis futuram eſſe conuergentem.

§. 21. Si quis autem voluerit valorem noſtri numeri C accuratius definire, ne opus quidem erit logarithmos, qui in ſingulis terminis occurrunt, in ſeries reſoluere. Quin etiam non neceſſe eſt certam relationem inter binos numeros p et q ſtatuere, ſed vtrumque pro arbitrio accipere licebit, ita vt, poſtquam valor primi membri $\Pi - lq$ fuerit expeditus, exiſtente

$$\Pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots \ldots + \frac{1}{p},$$

 totum

totum negotium reducatur ad ſummationem huius ſeriei infinitae:

$$\left(\frac{1}{p+1} - l\,\frac{q+1}{q}\right) + \left(\frac{1}{p+2} - \frac{q+2}{q+1}\right) + \left(\frac{1}{p+3} - l\,\frac{q+3}{q+2}\right) + \text{etc.}$$

cuius loco conſideremus hanc ſeriem generalem ſummandam:

$$S = X + X' + X'' + X'' + \text{etc.},$$

vbi X ſit functio quaecunque ipſius x, ſequentes vero termini oriantur, ſi loco x ſucceſſiue ſcribantur valores $x+1$, $x+2$, $x+3$, quem in finem loco litterae q ſcribatur x, et quia differentia inter p et q eſt data, ſtatuatur $p = x + a - 1$, ita vt ſit

$$X = \frac{1}{x+a} - l\,\frac{x+1}{x} \text{ et } X' = \frac{1}{x+a+1} - l\,\frac{x+2}{x+1},$$

et ita porro. Sicque ſumto pro x numero quocunque valor noſtri numeri C erit $C = \Pi - l\,q + S$, ſiue

$$C = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots \ldots \frac{1}{x+a-1} - l\,x + S,$$

vbi ambo numeri x et a arbitrio noſtro permittuntur, quo non obſtante in ſequente euolutione numerum x vt variabilem tractare licebit.

§. 22. Nunc igitur loco x ſcribamus $x+1$, et valor ipſius S abeat tum in S', ita vt ſit

$$S' = X' + X'' + X''' + \text{etc.}$$

eritque $S' - S = -X$. Verum cum S ſit certa functio ipſius x, erit per reductionem notiſſimam:

$$S = S + \frac{dS}{dx} + \frac{ddS}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3S}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc.},$$

vnde naſcitur iſta aequatio:

$$X + \frac{dS}{dx} + \frac{ddS}{1.2\,dx^2} + \frac{d^3S}{1.2.3\,dx^3} + \frac{d^4S}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.} = 0,$$

cx

ex cuius duobus prioribus membris, ſiquidem ſequentia continuo decreſcere ſpectemus, concluditur fore propemodum $dS = -X\,dx$ ideoque $S = -\int X\,dx$, quod integrale ita capi debet, vt ſi eſſet $x = \infty$ fieret $S = 0$, quandoquidem ſumto $x = \infty$, foret vtique $C = \Pi - lq$.

§. 23. Erit ergo $-\int X\,dx$ primus terminus novae ſeriei, per quam litteram S exprimere nobis eſt propoſitum, atque ex forma aequationis facile intelligitur ſtatui debere

$$S = -\int X\,dx + \alpha X + \beta\frac{dX}{dx} + \gamma\frac{ddX}{dx^2} + \delta\frac{d^3X}{dx^3} + \varepsilon\frac{d^4X}{dx^4} + \text{etc.}$$

vnde fit

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dx} &= -X + \frac{\alpha\,dX}{dx} + \frac{\beta\,ddX}{dx^2} + \frac{\gamma\,d^3X}{dx^3} + \frac{\delta\,d^4X}{dx^4} + \text{etc.}\\
\frac{ddS}{dx^2} &= -\frac{dX}{dx} + \frac{\alpha\,ddX}{dx^2} + \frac{\beta\,d^3X}{dx^3} + \frac{\gamma\,d^4X}{dx^4} + \frac{\delta\,d^5X}{dx^5} + \text{etc.}\\
\frac{d^3S}{dx^3} &= -\frac{ddX}{dx^2} + \frac{\alpha\,d^3X}{dx^3} + \frac{\beta\,d^4X}{dx^4} + \frac{\gamma\,d^5X}{dx^5} + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

quibus valoribus ſubſtitutis ac debite ordinatis obtinebitur ſequens aequatio:

$$\begin{array}{llllll}
0 = X & + \frac{\alpha\,dX}{dx} & + \frac{\beta\,ddX}{dx^2} & + \frac{\gamma\,d^3X}{dx^3} & + \frac{\delta\,d^4X}{dx^4} & + \text{etc.}\\
\;\;\; - X & - \frac{1}{2} & + \frac{\alpha}{2} & + \frac{\beta}{2} & + \frac{\gamma}{2} & \\
 & & - \frac{1}{6} & + \frac{\alpha}{6} & + \frac{\beta}{6} & \\
 & & & - \frac{1}{24} & + \frac{\alpha}{24} & \\
 & & & & - \frac{1}{120} & \\
 & & & & \text{etc.} &
\end{array}$$

vnde ſequentes determinationes oriuntur:

$$\alpha = \tfrac{1}{2},\; \beta = -\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{6},\; \gamma = -\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{6}\alpha + \tfrac{1}{24},\; \delta = -\tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{6}\beta - \tfrac{1}{24}\alpha + \tfrac{1}{120},$$

atque hinc

$$\alpha = \tfrac{1}{2},\; \beta = -\tfrac{1}{12},\; \gamma = 0,\; \delta = \tfrac{1}{720},\; \text{etc.}$$

§. 24.

§. 24. Hoc autem modo determinatio litterarum α, β, γ, δ, etc. nimis fit moleſta, vnde vt hunc laborem ſubleuemus, conſideremus ſequentem ſeriem, vbi iidem coefficientes occurrant, eique deriuatae ſubſcribantur hoc modo:

$$\begin{array}{rcccccccl}
v = & -1 & +\alpha z & +\beta z^2 & +\gamma z^3 & +\delta z^4 & +\varepsilon z^5 & + \text{etc.} \\
+\frac{1}{2}vz = & & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2}\alpha & +\frac{1}{2}\beta & +\frac{1}{2}\gamma & +\frac{1}{2}\delta & + \text{etc.} \\
+\frac{1}{6}vz^2 = & & & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{6}\alpha & +\frac{1}{6}\beta & +\frac{1}{6}\gamma & + \text{etc.} \\
+\frac{1}{24}vz^3 = & & & & -\frac{1}{24} & +\frac{1}{24}\alpha & +\frac{1}{24}\beta & + \text{etc.} \\
+\frac{1}{120}vz^4 = & & & & & -\frac{1}{120} & +\frac{1}{120}\alpha & + \text{etc.} \\
\text{etc.} & & & & & & \text{etc.} &
\end{array}$$

His igitur ſeriebus in vnam ſummam collectis, ob

$$\alpha - \frac{1}{2} = 0,\ \beta + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6} = 0,\ \gamma + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{24} = 0, \text{ etc.}$$

naſcetur:

$$v\left(1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{24}z^3 + \frac{1}{120}z^4 + \frac{1}{720}z^5 + \text{etc.}\right) = -1.$$

Cum igitur ſit

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4,$$

euidens eſt quantitatem v multiplicari per $\frac{e^z - 1}{z}$, ita vt ſit $\frac{v(e^z - 1)}{z} = -1$, vnde fit $v = \frac{-z}{e^z - 1}$; ſicque tantum opus eſt vt hinc valor ipſius v in ſeriem reſoluatur, quippe quae conuenire debet cum ſerie aſſumta, ſicque ſponte valores litterarum α, β, γ, etc. ſe manifeſtabunt.

§. 25. Quo igitur hinc valorem ipſius v commode in ſeriem conuertamus, quia illa aequatio nobis praebet

$e^z =$

$e^z = \frac{v-z}{v}$; ſtatuamus $v = u + \frac{1}{2}z$, vt prodeat

$$e^z = \frac{u - \frac{1}{2}z}{u + \frac{1}{2}z} = \frac{2u - z}{2u + z};$$

hinc erit $z = l(2u - z) - l(2u + z)$ et differentiando $dz = \frac{4(zdu - udz)}{4uu - zz}$, quam ergo formulam viciſſim ita integrari oportet, vt poſito $z = 0$ fiat $u = 1$. Statuatur nunc $u = sz$, ac ſumto $z = 0$ fiet $s = -\infty$; tum autem erit $dz = \frac{4ds}{4ss - 1}$, ex qua iam aequatione eiusmodi ſeriem pro s quaeri oportet, vt ſumto $z = 0$ fiat $s = \infty$.

§. 27. Cum igitur hinc habeamus $4ss - 1 = \frac{4ds}{dz}$, pro s fingamus hanc ſeriem:

$$2s = \frac{A}{z} + Bz + Cz^3 + Dz^5 + Ez^7 + \text{etc.}$$

vnde fit

$$\frac{2ds}{dz} = -\frac{A}{zz} + B + 3Czz + 5Dz^4 + 7Ez^6 + \text{etc.},$$

tum vero

$$\begin{aligned} 4ss = \frac{AA}{zz} + 2AB &+ 2ACzz + 2ADz^4 + 2AEz^6 + \text{etc.} \\ +BB &\quad + 2BC \quad + 2BD \quad + \text{etc.} \\ & \qquad\qquad + CC \end{aligned}$$

quibus ſeriebus ſubſtitutis aequatio $4ss - 1 - \frac{4ds}{dz} = 0$ ſuppeditat hanc expreſſionem:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{2A}{zz} - 2B - 6Czz - 10Dz^4 - 14Ez^6 - 18Fz^8 - \text{etc.} \\ + AA + 2AB + 2AC + 2AD + 2AE + 2AF + \text{etc.} \\ -1 + BB + 2BC + 2BD + 2BE + \text{etc.} \\ + CC + 2CD + \text{etc.} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Hinc igitur ex primis terminis fit $A = -2$; ex ſequentibus porro deducitur:

$$2B = 2AB - 1$$
$$6C = +2AC + BB$$
$$10D = 2AD + 2BC$$
$$14E = 2AE + 2BD + CC$$
$$18F = 2AF + 2BE + 2CD$$
$$22G = 2AG + 2BF + 2CE + DD$$
etc.

§. 28. Cum igitur ſit $A = -2$, ſequentes determinationes obtinebuntur:

$$B = -\tfrac{1}{6}, \qquad E = \tfrac{2BD + CC}{18},$$
$$C = \tfrac{BB}{10}, \qquad F = \tfrac{2BE + 2CD}{22},$$
$$D = \tfrac{2BC}{14}, \qquad G = \tfrac{2BF + 2CE + DD}{26}, \text{ etc.}$$

Quo igitur has aequationes ſimpliciores reddamus, ſtatuamus $B = 2\mathfrak{A}$, $C = 2\mathfrak{B}$, $D = 2\mathfrak{C}$, $E = 2\mathfrak{D}$, etc. tum enim determinationes inuentae dabunt:

$$\mathfrak{A} = -\tfrac{1}{12}, \qquad \mathfrak{E} = \tfrac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{11},$$
$$\mathfrak{B} = \tfrac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{5}, \qquad \mathfrak{F} = \tfrac{2\mathfrak{A}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}}{13},$$
$$\mathfrak{C} = \tfrac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{7}, \qquad \mathfrak{G} = \tfrac{2\mathfrak{A}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{15},$$
$$\mathfrak{D} = \tfrac{2\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}}{9}, \qquad \mathfrak{H} = \tfrac{2\mathfrak{A}\mathfrak{G} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{E} + \mathfrak{D}\mathfrak{D}}{17},$$

quos valores multo facilius definire licebit quam ſuperiores α, β, γ, δ.

§. 29. Inuentis autem valoribus harum litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. primo erit:

$$s = -\frac{1}{z} + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^3 + \mathfrak{C}z^5 + \mathfrak{D}z^7 + \mathfrak{E}z^9 + \text{etc.}$$

tum vero hinc erit $u = sz$ atque $v = u + \frac{1}{2}z$, vnde pro v hanc adepti ſumus ſeriem:

$$v = -1 + \frac{1}{2}z + \mathfrak{A}z^2 + \mathfrak{B}z^4 + \mathfrak{C}z^6 + \mathfrak{D}z^8 + \text{etc.}$$

vbi perſpicitur omnes poteſtates impares ipſius z praeter primam hic deficere. Cum igitur poſuerimus

$$v = -1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \zeta z^6 + \text{etc.}$$

comparatione inſtituta patet fore

$$\alpha = \tfrac{1}{2},\ \beta = \mathfrak{A},\ \gamma = 0,\ \delta = \mathfrak{B},\ \varepsilon = 0,\ \zeta = \mathfrak{C},\ \eta = 0, \text{etc.}$$

His igitur valoribus introductis ſumma generalis S ſupra inueſtigata fiet:

$$S = -\int X dx + \tfrac{1}{2}X + \mathfrak{A}\frac{dX}{dx} + \mathfrak{B}\frac{d^3X}{dx^3} + \mathfrak{C}\frac{d^5X}{dx^5} + \mathfrak{D}\frac{d^7X}{dx^7} + \text{etc.}$$

§. 30. Quoniam hic valor ipſius $\mathfrak{A}$ eſt negatiuus $= -\frac{1}{12}$, ſequens vero littera $\mathfrak{B}$ fit poſitiua, ſequens $\mathfrak{C}$ iterum negatiua et ita deinceps alternatim, huius conditionîs vt ſtatim rationem habeamus, ſimulque hos numeros ad eos, qui *Bernoulliani* vocari ſolent, perducamus, ponamus

$$2s = -\frac{2}{z} - Az + Bz^3 - Cz^5 + Dz^7 - Ez^9 + \text{etc.}$$

et facta euolutione reperitur

$$A = \frac{1}{6},\qquad E = \frac{2AD + 2BC}{22},$$
$$B = \frac{AA}{10},\qquad F = \frac{2AE + 2BD + CC}{26},$$
$$C = \frac{2AB}{14},\qquad G = \frac{2AF + 2BE + 2CD}{30},$$
$$D = \frac{2AC + BB}{18},\qquad \text{etc.}$$

tum vero erit

$$v = -1 + \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}Azz + \tfrac{1}{2}Bz^4 - \tfrac{1}{2}Cz^6 + \tfrac{1}{2}Dz^8 - \text{etc.}$$

 quae

quae ſeries ſi comparetur cum aſſumta, fiet

$$\alpha = \tfrac{1}{2},\ \beta = -\tfrac{1}{2}A,\ \gamma = 0,\ \delta = \tfrac{1}{2}B,$$
$$\varepsilon = 0,\ \zeta = -\tfrac{1}{2}C,\ \eta = 0,\ \text{etc.}$$

His igitur litteris A, B, C, D, etc. introductis ſumma generalis erit:

$$S = -\int X\,dx + \tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{2}A\frac{dX}{dx} + \tfrac{1}{2}B\frac{d^3X}{dx^3} - \tfrac{1}{2}C\frac{d^5x}{dx^5} + \text{etc.}$$

Si porro faciamus $A = 2\mathfrak{A}$, $B = 2\mathfrak{B}$, $C = 2\mathfrak{C}$, etc relationes inter has litteras ita ſe habebunt:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{12},\qquad \mathfrak{E} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{11},$$
$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{5},\qquad \mathfrak{F} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}}{13},$$
$$\mathfrak{C} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{7},\qquad \mathfrak{G} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{15},$$
$$\mathfrak{D} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}}{9},\qquad \text{etc.}$$

tum vero erit

$$S = -\int X\,dx + \tfrac{1}{2}X - \mathfrak{A}\frac{dX}{dx} + \mathfrak{B}\frac{d^3X}{dx^3} - \mathfrak{C}\frac{d^5X}{dx^5} + \text{etc.}$$

Ex his formulis iam intelligitur, iſtos numeros affines eſſe illis, qui in poteſtates reciprocas pares ingrediuntur; erit enim

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6},\ \mathfrak{B} = \tfrac{1}{2^3}\cdot\tfrac{1}{90},\ \mathfrak{C} = \tfrac{1}{2^5}\cdot\tfrac{1}{945},\ \mathfrak{D} = \tfrac{1}{2^7}\cdot\tfrac{1}{9450},\ \mathfrak{E} = \tfrac{1}{2^9}\cdot\tfrac{1}{93555};$$

quos numeros vltra trigeſimam poteſtatem olim iam euolutos dedi.

§. 31. Hinc igitur pro noſtro inſtituto ſequens theorema vniuerſale proponamus.

Theorema.

Si propoſita fuerit ſeries in infinitum excurrens:

$$S = X + X' + X'' + X''' + \text{etc.},$$

tum

tum eius ſumma ſequenti modo exprimetur:

$$S = -\int X\,dx + \tfrac{1}{2}X - \frac{1}{2\cdot 6}\cdot\frac{dX}{dx} + \frac{1}{2^3\cdot 90}\cdot\frac{d^3X}{dx^3} - \frac{1}{2^5\cdot 945}\cdot\frac{d^5X}{dx^5}$$
$$+ \frac{1}{2^7\cdot 9450}\cdot\frac{d^7X}{dx^7} - \frac{1}{2^9\cdot 93555}\cdot\frac{d^9X}{dx^9} + \text{etc.}$$

vbi ſequentes coefficientes depromere licet ex Introductione mea in Analyſin Infinitorum pag. 131. Hic autem notetur, integrale $\int X\,dx$ ita capi debere, vt euaneſcat poſito $x = \infty$.

Applicatio
ad noſtrum caſum quo $X = \frac{1}{x+a} - l\frac{x+1}{x}$.

§. 32. Cum igitur ſit $X = \frac{1}{x+a} + l\,x - l(x+1)$, erit primo pro formula integrali

$$\int X\,dx = l(x+a) + x\,l\,x - (x+1)\,l(x+1) + C,$$

quae conſtans C quoniam ita accipi debet, vt integrale euaneſcat facto $x = \infty$, iſtud integrale in hanc formam transfundatur:

$$\int X\,dx = -x\,l\frac{x+1}{x} + l\frac{x+a}{x+1} + C,$$

quae expreſſio facto $x = \infty$ fit

$$\int X\,dx = -\infty\,l\frac{\infty+1}{\infty} + l\,1 + C = 0,$$

vbi quia

$$l\frac{\infty+1}{\infty} = l\,1 + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{2\infty^2} + \frac{1}{3\infty^2},$$

erit $\infty\,l\frac{\infty+1}{\infty} = 1$, ideoque iſtud integrale $C - 1 = 0$, ergo conſtans $C = 1$, quamobrem primum membrum noſtrae expreſſionis eſt

$$\int X\,dx = -x\,l\frac{x+1}{x} + l\frac{x+a}{x+1} + 1,$$

vnde pro binis prioribus membris habebimus

$$-\int X\,dx + \tfrac{1}{2}X = (x - \tfrac{1}{2})\,l\frac{x+1}{x} - l\frac{x+a}{x+1} + \frac{1}{2(x+a)} - 1.$$

§. 33. Reliqua membra noſtrae expreſſionis nulla laborant difficultate, ſiquidem per differentiationem continuam reperitur:

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1};$$
$$\frac{d^3X}{dx^3} = 1.\,2\left(-\frac{3}{(x+a)^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}\right);$$
$$\frac{d^5X}{dx^5} = 1.\,2.\,3.\,4\left(-\frac{5}{(x+a)^6} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{(x+1)^5}\right);$$
$$\frac{d^7X}{dx^7} = 1\,\ldots\,6\left(-\frac{7}{(x+a)^8} + \frac{1}{x^7} - \frac{1}{(x+1)^7}\right);$$
$$\frac{d^9X}{dx^9} = 1\,\ldots\,8\left(-\frac{9}{(x+a)^{10}} + \frac{1}{x^9} - \frac{1}{(x+1)^9}\right);$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

§. 34. Ex his igitur ſumma noſtrae ſeriei S colligitur fore

$$\begin{aligned}
S = {} & (x-\tfrac{1}{2})\, l\,\frac{x+1}{x} - l\,\frac{x+a}{x+1} + \frac{1}{2(x+a)} \\
& - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+a)^2}\right) \\
& + \frac{1}{3.4.5}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{3}{(x+a)^4}\right) \\
& - \frac{1}{5.6.7}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{(x+1)^5} - \frac{5}{(x+a)^6}\right) \\
& + \frac{1}{7.8.9}\cdot\frac{3}{10}\left(\frac{1}{x^7} - \frac{1}{(x+1)^7} - \frac{7}{(x+a)^8}\right) \\
& - \frac{1}{9.10.11}\cdot\frac{5}{6}\left(\frac{1}{x^9} - \frac{1}{(x+1)^9} - \frac{9}{(x+a)^{10}}\right) \\
& + \frac{1}{11.12.13}\cdot\frac{691}{210}\left(\frac{1}{x^{11}} - \frac{1}{(x+1)^{11}} - \frac{11}{(x+a)^{12}}\right) \\
& - \frac{1}{13.14.15}\cdot\frac{35}{2}\left(\frac{1}{x^{13}} - \frac{1}{(x+1)^{13}} - \frac{13}{(x+a)^{14}}\right). \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

vbi fractiones ſecundo loco poſitae $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{691}{210}$, etc. ſunt numeri Bernoulliani vocati, qui vlterius ita progrediuntur: $\frac{35}{2}$, $\frac{3617}{30}$, $\frac{43867}{42}$, $\frac{1222277}{110}$, $\frac{854513}{6}$, $\frac{1181820455}{546}$, $\frac{76977927}{2}$, $\frac{23749461029}{30}$, $\frac{8615841276005}{462}$, $\frac{84802531453387}{170}$, $\frac{90219075042845}{6}$.

§. 35.

§. 35. Hactenus numerum x tanquam variabilem ſpectauimus, nunc autem facta euolutione ambos numeros x et a pro lubitu aſſumere licet, indeque ſemper idem valor pro numero noſtro C reſultabit, quippe qui erit

$$C = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x+a-1} - lx + S,$$

atque ſeries S eo promptius conuerget, quo maiores numeri loco x et a accipiantur. Inter binos autem numeros x et a eiusmodi relationem aſſumi conueniet, vt formula $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+a)^2}$ proxime euaneſcat. Veluti ſi fuerit $x = 10$, haec formula: $\frac{1}{110} - \frac{1}{(10+a)^2}$, fit minima, ſi fuerit vel $a = 0$ vel $a = 1$; omnium autem minima fiet ſumto $a = \frac{1}{2}$, tum enim iſte valor euadet $\frac{1}{110} - \frac{4}{441}$; vnde patet, perpetuo expedire vt ſumatur $a = \frac{1}{2}$. Quamobrem ſi fuerit x numerus integer, primum membrum erit

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots \ldots + \frac{1}{x-\frac{1}{2}},$$

cuius ſeriei valor quemadmodum inueniri debeat ſupra eſt oſtenſum: erit ſcilicet

$$2 - 2l2 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{7} + \tfrac{2}{9} + \ldots + \frac{2}{2x-1}.$$

Hoc igitur modo noſtra expreſſio maxime conuerget, et dummodo numerus x modice magnus accipiatur, pauci termini ſufficient ad valorem numeri C ſatis exacte eruendum.

§. 36. Poſtquam igitur valorem noſtri numeri C per ſeries infinitas expreſſimus, videamus, annon etiam per formulas finitas integrales exhiberi queat, vnde tutius concludi poterit ad quodnam genus quantitatum iſte numerus ſit referendus. Ac primo quidem ſeries indefini-

ta $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$, ex euolutione huius formulae integralis naſcitur: $\int \frac{(1 - x^n)\,dx}{1 - x}$, ſiquidem poſt integrationem ſtatuatur $x = 1$, vbi iam numerus n tam fractus quam integer eſſe poteſt, ſicque habebimus

$$C = \int \frac{(1 - x^n)\,dx}{1 - x} - l\,n,$$

ſiquidem loco n numerus infinitus accipiatur. Inueſtigemus ergo etiam formulam integralem, quae poſito $x = 1$ indefinite nobis praebeat $l\,n$. Cum autem poſito $x = 1$ fiat $\frac{1 - x^n}{1 - x} = n$, erit $l \frac{1 - x^n}{1 - x} = l\,n$; vnde patet, ſi n denotet numerum infinite magnum, tum fore

$$C = \int \frac{(1 - x^n)\,dx}{1 - x} - l \frac{1 - x^n}{1 - x},$$

vbi ſcilicet ſtatuitur $x = 1$.

§. 37. Eſt vero porro

$$l\,(1 - x^n) = - n \int \frac{x^{n-1}\,dx}{1 - x^n} \text{ et } l\,(1 - x) = - \int \frac{dx}{1 - x},$$

quibus valoribus ſubſtitutis per meras formulas integrales habebimus:

$$C = \int \frac{(1 - x^n)\,dx}{1 - x} + n \int \frac{x^{n-1}\,dx}{1 - x^n} - \int \frac{dx}{1 - x},$$

quae expreſſio reducitur ad hanc formam:

$$C = - \int \frac{x^n\,dx}{1 - x} + n \int \frac{x^{x-1}\,dx}{1 - x^n},$$

ita vt iam C aequetur differentiae harum duarum formularum

larum integralium, ſiquidem poſt integrationem ſtatuatur $x = 1$, exponens vero n capiatur infinite magnus; vnde patet, hanc formulam eo propius verum valorem formulae C eſſe exhibituram, quo maior numerus n aſſumatur.

§. 38. Verum etiam has formulas ab exponentibus infinite magnis liberare licebit, ſtatuendo $x^n = z$, et quoniam caſu $x = 1$ fit etiam $z = 1$, in formulis integralibus hinc oriundis capi debebit $z = 1$. Quare cum hinc ſit $n x^{n-1} dx = dz$, tum vero $x = z^{\frac{1}{n}}$, hincque

$$dx = \tfrac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{z^{\frac{1}{n}} dz}{nz},$$

noſtrae formulae abibunt in ſequentes:

$$C = -\tfrac{1}{n}\int \frac{z^{\frac{1}{n}} dz}{1 - z^{\frac{1}{n}}} + \int \frac{dz}{1-z}.$$

Notum autem eſt eſſe $lz = n(z^{\frac{1}{n}} - 1)$, exiſtente $n = \infty$, quo valore in priore parte ſubſtituto fit

$$C = \int \frac{dz}{lz} + \int \frac{dz}{1-z},$$

ſi modo poſt integrationem ponatur $z = 1$, ita vt haec formula iam penitus ab infinito ſit liberata, quae per unicum ſignum ſummatorium ita exhiberi poteſt:

$$C = \int dz \left(\tfrac{1}{1-z} + \tfrac{1}{lz}\right);$$

ſicque tota quaeſtio circa naturam numeri C eo reducitur, vt inueſtigetur valor iſtius formulae integralis:

$$\int dz\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{lz}\right),$$

a termino $z=0$ vsque ad $z=1$ extenſus, quae forma vtique omnem attentionem meretur. Euidens autem eſt, priorem partem huius formulae

$$\int\frac{dz}{1-z}=-l(1-z),$$

hoc caſu fieri $+\infty$. Deinde etiam oſtendi, alteram partem $\int\frac{dz}{lz}$ infinitum negatiuum praebere; ex quo intelligitur, ambas formulas coniunctas valorem finitum determinatum producere poſſe.

§. 39. Ceterum quoniam ſupra nonnullas eximias propietates ad numerum C ſpectantes deteximus, operae pretium erit, eas hic coniunctim aſpectui expoſuiſſe. Notetur ergo litteras α, β, γ, δ, etc. deſignare ſummas ſequentium ſerierum:

$$\alpha=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.}$$

$$\beta=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\text{etc.}$$

$$\gamma=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{etc.}$$

$$\delta=1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}+\text{etc.}$$

etc. etc.

quibus valoribus conſtitutis ſequentia theoremata ſunt inventa:

I. $1-C=\frac{1}{2}(\alpha-1)+\frac{1}{3}(\beta-1)+\frac{1}{4}(\gamma-1)+\frac{1}{5}(\delta-1)+\text{etc.}$

II. $C=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{4}\gamma-\frac{1}{5}\delta+\frac{1}{6}\varepsilon-\frac{1}{7}\zeta+\text{etc.}$

III. $1=(\alpha-\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{3}\varepsilon-\frac{1}{6}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{4}\eta-\frac{1}{8}-\frac{1}{9})+\text{etc.}$

IV.

$$\text{IV.}\ 2C-1=\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{3}\beta\right)+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{5}\delta\right)+\left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{2}{7}\zeta\right)+\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{2}{9}\theta\right)+\text{etc.}$$

$$\text{V.}\ 2-2\,l2-C=\left(\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{7}{8}\beta-\tfrac{2}{3}\right)+\left(\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{31}{32}\delta-\tfrac{2}{5}\right)+\left(\tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{127}{128}\zeta-\tfrac{2}{7}\right)+\left(\tfrac{2}{9}\cdot\tfrac{511}{512}\theta-\tfrac{2}{9}\right)+\text{etc.}$$

$$\text{VI.}\ 1-2l2+C=\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{3.2^3}\beta\right)+\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{5.2^5}\delta\right)+\left(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{7}-\tfrac{2}{7.2^7}\zeta\right)+\text{etc.}$$

$$\text{VII.}\ l\,2-C=\frac{1}{3.2^2}\beta+\frac{1}{5.2^4}\delta+\frac{1}{7.2^6}\zeta+\frac{1}{9.2^8}\theta+\frac{1}{11.2^{10}}\kappa+\text{etc.}$$

$$\text{VIII.}\ 1-l\tfrac{3}{2}-C=\frac{1}{3.2^2}(\beta-1)+\frac{1}{5.2^4}(\delta-1)+\frac{1}{7.2^6}(\zeta-1)+\frac{1}{9.2^8}(\theta-1)+\text{etc.}$$

Hic ſcilicet vbique eſt $C = 0,5772156649015325$ ſiue

$$C = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots\ldots+\tfrac{1}{n}-l\,n$$

ſumto pro n numero infinito.

DE INSIGNIBVS PROPRIETATIBVS VNCIARVM BINOMII AD VNCIAS QVORVMVIS POLYNOMIORVM EXTENSIS.

Auctore
L. EVLERO.

Quae non ita pridem demonſtraui circa inſignes proprietates, quibus vnciae Binomii ad dignitatem quamcunque euecti ſunt praeditae, etiam ſimili modo ad vncias Trinomii et Quadrinomii atque adeo in genere Polynomii cuiusque ad dignitatem quamcunque euecti extendi poſſunt, id quod in hac diſſertatione dilucide oſtendere conſtitui; quae quo facilius intelligi queant, denuo ab vnciis Binomii incipiam, quarum proprietates cum iam ſatis perſpicue a me ſint demonſtratae, eas hic ſine demonſtratione ſuccincte ante oculos ponam, quo hoc pacto progreſſio ad Polynomia clarius perſpiciatur: neque enim opus,

pus erit, omnia quae ſum allaturus, demonſtrationibus corroborare, quandoquidem eae omnino ſimiles ſunt iis, quae de vnciis Binomii ſunt traditae.

I. De vnciis Binomii $(1+z)^n$.

§. 1. Denotet character $[\frac{n}{p}]$ quamlibet harum vnciarum, hac ratione vt ſit

$$(1+z)^n = [\tfrac{n}{0}] + [\tfrac{n}{1}]z + [\tfrac{n}{2}]z^2 + [\tfrac{n}{3}]z^3 + [\tfrac{n}{4}]z^4 + \text{etc.}$$

atque euidens eſt fore $[\frac{n}{0}] = 1$ et $[\frac{n}{1}] = n$; tum vero quilibet ſequentium terminorum ex praecedente ita definitur, vt ſit

$$[\tfrac{n}{p+1}] = \tfrac{n-p}{p+1}[\tfrac{n}{p}].$$

Praeterea vero notaſſe iuuabit, ſemper fore $[\frac{n}{p}] = 0$, tam quando p eſt numerus negatiuus quam quando p eſt numerus maior quam n; id quod intelligendum eſt, ſi pro p numeri integri accipiantur. Deinde quia vnciae hae finem verſus eodem ordine regrediuntur, quo ab initio progrediuntur, erit $[\frac{n}{n}] = 1$, atque in genere erit $[\frac{n}{n-p}] = [\frac{n}{p}]$. Praeterea vero iſtae vnciae poteſtatis $(1+z)^n$ cum vnciis ſequentis poteſtatis $(1+z)^{n+1}$ ita cohaerent, vt ſit $[\frac{n+1}{p+1}] = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p+1}]$, vnde ſequitur fore

$$[\tfrac{n+1}{p+1}] = \tfrac{n+1}{p+1}[\tfrac{n}{p}].$$

§. 2. Quo clarius appareat quales numeri his characteribus quouis caſu deſignentur, ſequentem ſchematiſmum adiungamus, in quo vnciae poteſtatum ſimpliciorum exhibeantur, ſimulque pro ſingulis valores tam ipſius n quam ipſius p indicentur:

Valores pro p

n	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6
0	1						
1	1 +	1					
2	1 +	2 +	1				
3	1 +	3 +	3 +	1			
4	1 +	4 +	6 +	4 +	1		
5	1 +	5 +	10 +	10 +	5 +	1	
6	1 +	6 +	15 +	20 +	15 +	6 +	1

vnde patet fore exempli cauſa $[\frac{6}{4}] = 15$ et $[\frac{5}{2}] = 10$. Conſtat autem in genere eſſe

$$[\tfrac{n}{p}] = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{n-p+1}{p}.$$

§. 3. His circa ſignificationem iſtorum characterum expoſitis omnes proprietates, quas non ita pridem demonſtraui, ſequenti formula ſuccincte repraeſentari poſſunt: $\int[\frac{m}{x}]\,[\frac{n}{p+x}] = [\frac{m+n}{n-p}]$, vbi membrum ſiniſtrum denotat ſummam progreſſionis, cuius ſinguli termini ſunt producta ex binis vnciis $[\frac{m}{x}]$ et $[\frac{n}{p+x}]$, dum ſcilicet litterae x ſucceſſiue omnes valores integri tribuuntur, quamdiu nimirum neuter factorum in nihilum abit; vnde patet incipiendum eſſe ab $x = 0$, hincque procedendum, donec fiat vel $x = m$ vel $p + x = n$, hoc eſt vsque ad $x = n - p$, ſi quidem fuerit $n - p < m$. Huius igitur progreſſionis ſumma demonſtrata eſt fore $= [\frac{m+n}{n-p}]$, quae etiam ita exhiberi poteſt: $[\frac{m+n}{m+p}]$. Hinc igitur ſequitur, ſumto $p = 0$ fore $\int[\frac{m}{x}] \cdot [\frac{n}{x}] = [\frac{m+n}{n}] = [\frac{m+n}{m}]$ etc. Sumto igitur inſuper

$m = n$

$m = n$, erit $\int [\frac{n}{x}]^2 = [\frac{2n}{n}]$, quod eſt illud eximium theorema, quo oſtendi eſſe

$$1 + [\tfrac{n}{1}]^2 + [\tfrac{n}{2}]^2 + [\tfrac{n}{3}]^2 + [\tfrac{n}{4}]^2 + \text{etc.} = [\tfrac{2n}{n}],$$

vbi obſeruaui iſtam ſummam etiam hoc producto exprimi poſſe:

$$\frac{2.\ 6.\ 10.\ -\ -\ -\ -\ -\ 4n-2}{1.\ 2.\ 3\ -\ -\ -\ -\ -\ n}.$$

Ita exempli gratia ſi ſumatur $n = 5$, ipſa progreſſio hinc reſultans erit

$$1 + 5^2 + 10^2 + 10^2 + 5^2 + 1 = 252,$$

prior vero expreſſio euadit

$$[\tfrac{2n}{n}] = [\tfrac{10}{5}] = \frac{10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} = 252,$$

alterum autem productum praebet

$$\frac{2.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} = 252.$$

II. De vnciis Trinomii $(1 + z + zz)^n$.

§. 4. Vtamur iterum eodem charactere $(\frac{n}{p})$ ad vncias huius poteſtatis trinomialis $(1 + z + zz)^n$ deſignandas; vnde probe cauendum erit, ne cum praecedente ſignificatu $[\frac{n}{p}]$ confundantur. Statuamus ſcilicet:

$$(1 + z + zz)^n = 1 + (\tfrac{n}{1}) z + (\tfrac{n}{2}) zz + (\tfrac{n}{3}) z^3 + \text{etc.}$$

ita vt hic quoque ſit $(\frac{n}{0}) = 1$; at quo ſignificatus ſequentium characterum facilius intelligatur, adiungamus ſimilem ſchematiſmum continentem poteſtates ſimpliciores:

Valores

Valores pro p

n	0	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,
1	1+	1+	1										
2	1+	2+	3+	2+	1								
3	1+	3+	6+	7+	6+	3+	1						
4	1+	4+	10+	16+	19+	16+	10+	4+	1				
5	1+	5+	15+	30+	45+	51+	45+	30+	15+	5+	1		
6	1+	6+	21+	50+	90+	126+	141+	126+	90+	50+	21+	6+	1

Hinc igitur patet, ſi fuerit exempli gratia $n = 6$ et $p = 7$, fore $(\frac{6}{7}) = 126$; ſimilique modo ſi $n = 5$ et $p = 5$, erit $(\frac{5}{5}) = 51$.

§. 5. Quoniam hae vnciae pariter ordinem retrogradum ſeruant, earumque vltima eſt $= 1$; euidens eſt fore $(\frac{1}{2}) = 1$; $(\frac{2}{4}) = 1$; $(\frac{3}{6}) = 1$; ſicque porro, ita vt in genere ſit $(\frac{n}{2n}) = 1$; ergo quia eodem ordine a fine regrediuntur, quo ab initio progrediuntur, erit

$$(\frac{n}{2n-1}) = (\frac{n}{1}) \text{ et } (\frac{n}{2n-2}) = (\frac{n}{2}),$$

atque in genere $(\frac{n}{2n-p}) = (\frac{n}{p})$. Deinde quia omnes vnciae tam primam antecedentes quam vltimam ſequentes ſunt nullae, valor characteris $(\frac{n}{p})$ primo euaneſcet, quoties p fuerit numerus negatiuus, deinde pariter euaneſcet, ſi fuerit $p > 2n$.

§. 6. Porro ex hac tabula perſpicuum eſt ſemper eſſe $(\frac{n}{1}) = n$: quemadmodum autem ſequentes ſe habeant, non tam facile perſpicitur; at vero oſtendi poteſt, pro qualibet poteſtate ſingulas vncias per binas praecedentes

ope

ope huius formulae determinari:

$$\left(\frac{n}{p+2}\right) = \frac{n-p-1}{p+2}\left(\frac{n}{p+1}\right) + \frac{2p-p}{p+2}\left(\frac{n}{p}\right).$$

Ita ſi fuerit verbi gratia $n = 5$ et $p = 2$, erit ex tabula modo data

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{5}{2}\right) = 15;\ \left(\frac{n}{p+1}\right) = \left(\frac{5}{3}\right) = 30;\ \left(\frac{n}{p+2}\right) = \left(\frac{5}{4}\right) = 45;$$

quia porro eſt

$$\frac{n-p-1}{p+2} = \frac{2}{4} \text{ et } \frac{2n-p}{p+2} = \frac{8}{4} = 2,$$

vtique erit $45 = \frac{1}{2}.\,30 + 2.\,15$. Simili modo ſi fuerit $n = 6$ et $p = 5$, erit

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{6}{5}\right) = 126,\ \left(\frac{n}{p+1}\right) = \left(\frac{6}{6}\right) = 141, \text{ et } \left(\frac{n}{p+2}\right) = \left(\frac{6}{7}\right) = 126;$$

euidens autem eſt eſſe

$$126 = \frac{0}{7}.\,141 + \frac{7}{7}.\,126 = 126.$$

§. 7. Quod nunc porro ad vncias ſequentis poteſtatis $(1 + z + zz)^{n+1}$ attinet, facile ex ipſa formatione apparet, quamlibet earum aequari aggregato ex tribus vnciis poteſtatis antecedentis, ſcilicet fore

$$\left(\frac{n+1}{p+2}\right) = \left(\frac{n}{p+2}\right) + \left(\frac{n}{p+1}\right) + \left(\frac{n}{p}\right);$$

vnde ſi loco $\left(\frac{n}{p+2}\right)$ valor ante inuentus ſubſtituatur, reperietur

$$\left(\frac{n+1}{p+2}\right) = \frac{n+1}{p+2}\left(\frac{n}{p+1}\right) + \frac{2n+2}{p+2}\left(\frac{n}{p}\right).$$

Hinc pro poteſtate ſeptima, ad quam ſuperior tabula non eſt extenſa, ſingulae vnciae ſequenti modo reperientur, ſtatuendo $n = 6$

Si $p = -2$	$\left(\frac{7}{0}\right) = \frac{7}{0}\cdot\left(\frac{6}{-1}\right) + \frac{14}{0}\cdot\left(\frac{6}{-2}\right) = 1$ vti per ſe conſtat.
Si $p = -1$	$\left(\frac{7}{1}\right) = \frac{7}{1}\cdot\left(\frac{6}{0}\right) + \frac{14}{1}\cdot\left(\frac{6}{-1}\right) = 7$
Si $p = 0$	$\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\cdot\left(\frac{6}{1}\right) + \frac{14}{2}\cdot\left(\frac{6}{0}\right) = 28$
Si $p = 1$	$\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{3}\cdot\left(\frac{6}{2}\right) + \frac{14}{3}\cdot\left(\frac{6}{1}\right) = 77$
Si $p = 2$	$\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4}\cdot\left(\frac{6}{3}\right) + \frac{14}{4}\cdot\left(\frac{6}{2}\right) = 161$
Si $p = 3$	$\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{7}{5}\cdot\left(\frac{6}{4}\right) + \frac{14}{5}\cdot\left(\frac{6}{3}\right) = 266$
Si $p = 4$	$\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{7}{6}\cdot\left(\frac{6}{5}\right) + \frac{14}{6}\cdot\left(\frac{6}{4}\right) = 357$

id quod egregie conuenit cum naturali harum progreſſionum continuatione.

§. 8. Reliquae proprietates, quarum demonſtratio ſimili modo expediri poteſt, quo pro Binomio eſt factum, reſpiciunt ſeriem, cuius terminus generalis ita exprimitur: $\left(\frac{m}{x}\right)\left(\frac{n}{p+x}\right)$, qui ſcilicet eſt productum ex duobus quibusuis characteribus huius generis, vnde ſinguli termini formantur, ſi loco x ordine ſcribantur valores 0, 1, 2, 3, 4, etc. vsque ad $x = 2m$, vel vsque ad $x = 2n - p$, quorum duorum terminorum minor valet. Huius autem ſeriei demonſtrari poteſt ſummam eſſe $\int\left(\frac{m}{x}\right)\left(\frac{n}{p+x}\right) = \left(\frac{m+n}{2n-p}\right)$, quae ſumma etiam ita exprimitur: $\left(\frac{m+n}{2m+p}\right)$. Ita ſi ſumamus $m = 3$, ſeries ex factore $\left(\frac{m}{x}\right)$ orta erit

$$1 + 3 + 6 + 7 + 6 + 3 + 1.$$

Deinde ſi ſumamus $n = 3$ et $p = 2$, alter factor $\left(\frac{3}{2+x}\right)$ dat hanc ſeriem: $6 + 7 + 6 + 3 + 1$, cuius termini in ſuperiores ſigillatim multiplicati praebent hanc progreſſionem:

$$6 + 21 + 36 + 21 + 6 = 90;$$

at

at vero formula $\left(\frac{m+n}{2n-p}\right)$ fit $= \left(\frac{6}{4}\right)$, cuius valor ex tabula ſupra allata reperietur fore $= 90$.

§. 9. Hinc igitur ſi ſumamus $p = 0$ prodibit iſta ſummatio: $\int \left(\frac{m}{x}\right)\left(\frac{n}{x}\right) = \left(\frac{m+n}{m}\right)$, vel etiam $= \left(\frac{m+n}{2n}\right)$. Quare ſi porro capiamus $m = n$, erit $\int \left(\frac{n}{x}\right)^2 = \left(\frac{2n}{2n}\right)$, cuius veritatem per ſequentia exempla exploremus:

Si	erit
$n = 0$	$1^2 = 1 = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$
$n = 1$	$1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 = \left(\frac{2}{2}\right) = 3$
$n = 2$	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 19 = \left(\frac{4}{4}\right) = 19$
$n = 3$	$1 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 6^2 + 3^2 + 1^2 = 141 = \left(\frac{6}{6}\right) = 141.$

Hoc igitur modo, quoniam tabula noſtra non vlterius eſt extenſa, valorem aſſignare poterimus characteris $\left(\frac{8}{8}\right)$, ſumto ſcilicet $n = 4$; erit enim:

$$\left(\frac{8}{8}\right) = 1^2 + 4^2 + 10^2 + 16^2 + 19^2 + 16^2 + 10^2 + 4^2 + 1^2$$

ſiue

$$\left(\frac{8}{8}\right) = 19^2 + 2(1^2 + 4^2 + 10^2 + 16^2) = 1107.$$

III. De vnciis quadrinomii $(1 + z + zz + z^3)^n$.

§. 10. Vtamur hic etiam eodem charactere $\left(\frac{n}{p}\right)$ ad ſingulas vncias huius poteſtatis euolutae exprimendas, ita vt ſit

$$(1 + z + zz + z^3)^n = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)z + \left(\frac{n}{2}\right)zz + \left(\frac{n}{3}\right)z^3 \ldots \left(\frac{n}{p}\right)z^p$$

vbi iterum manifeſto eſt $\left(\frac{n}{0}\right) = 1$; at quo ſignificatus ſequentium characterum facilius intelligatur, adiungamus ſimilem ſchematiſmum continentem poteſtates ſimpliciores:

n	Valores pro p: 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1													
1	1+	1+	1+	1										
2	1+	2+	3+	4+	3+	2+	1							
3	1+	3+	6+	10+	12+	12+	10+	6+	3+	1				
4	1+	4+	10+	20+	31+	40+	44+	40+	31+	20+	10+	4+	1	
5	1+	5+	15+	35+	65+	101+	135+	155+	155+	135+	101+	65+	35+	15
6	1+	6+	21+	56+	120+	216+	336+	456+	546+	580+	546	etc.		

Hinc igitur patet, ſi fuerit verbi gratia $n = 6$ et $p = 7$, fore $(\frac{6}{7}) = 456$. Similique modo ſi fuerit $n = 5$ et $p = 10$ erit $(\frac{5}{10}) = 101$.

§. 11. Nunc ex ordine retrogrado pro vltimis cuiusque ordinis terminis erit $(\frac{1}{3}) = 1$; $(\frac{6}{2}) = 1$; $(\frac{3}{9}) = 1$, atque adeo in genere $(\frac{n}{3n}) = 1$. Ex eodem porro principio ſequitur fore $(\frac{n}{3n - p}) = (\frac{n}{p})$; hincque intelligitur, valorem formulae $(\frac{n}{p})$ in nihilum eſſe abiturum, tam ſi fuerit $p < 0$ quam ſi fuerit $p > 3n$, quod quidem de numeris integris eſt intelligendum.

§. 12. Caeterum hic itidem euidens eſt eſſe $(\frac{n}{1}) = n$; pro ſequentibus autem notandum eſt, quemlibet terminum per ternos praecedentes ita determinari vt ſit

$$(\frac{n}{p+3}) = \frac{n-p-2}{p+3}(\frac{n}{p+2}) + \frac{2n-p-1}{p+3}(\frac{n}{p+1}) + \frac{3n-p}{p+3}(\frac{n}{p}).$$

Ita ſi fuerit $n = 5$ et $p = 2$, erit

$$(\frac{5}{5}) = \frac{1}{5}(\frac{5}{4}) + \frac{7}{5}(\frac{5}{3}) + \frac{13}{5}(\frac{5}{2});$$

euidens autem eſt ob $(\frac{5}{2}) = 15$; $(\frac{5}{3}) = 35$; $(\frac{5}{4}) = 65$ et

$(\frac{5}{5})$

$(\frac{5}{5}) = 101$ fore

$$101 = \tfrac{1}{5}(75 + 7 \cdot 35 + 13 \cdot 15) = 101.$$

§. 13. Sequentis autem poteſtatis, cuius exponens $= n + 1$, ſingulae vnciae per ſuperiores ita determinantur, vt ſit

$$(\tfrac{n+1}{p+3}) = (\tfrac{n}{p+3}) + (\tfrac{n}{p+2}) + (\tfrac{n}{p+1}) + (\tfrac{n}{p}),$$

vbi ſi loco $(\frac{n}{p+3})$ valor ante inuentus ſubſtituatur prodibit:

$$(\tfrac{n+1}{p+3}) = \tfrac{n+1}{p+3}(\tfrac{n}{p+2}) + \tfrac{2n+2}{p+3}(\tfrac{n}{p+1}) + \tfrac{3n+3}{p+3}(\tfrac{n}{p}),$$

ſiue erit

$$(\tfrac{n+1}{p+3}) = \tfrac{n+1}{p+3}[(\tfrac{n}{p+2}) + 2(\tfrac{n}{p+1}) + 3(\tfrac{n}{p})];$$

hinc ſi loco $p + 3$ ſcribamus p fiet

$$(\tfrac{n+1}{p}) = \tfrac{n+1}{p}[(\tfrac{n}{p-1}) + 2(\tfrac{n}{p-2}) + 3(\tfrac{n}{p-3})].$$

Ita ſi ſumamus $n = 5$ et $p = 6$ habebimus:

$$(\tfrac{6}{6}) = \tfrac{6}{6}[(\tfrac{5}{5}) + 2(\tfrac{5}{4}) + 3(\tfrac{5}{3})],$$

ideoque ſubſtitutis valoribus ex tabula ſuperiore erit

$$(\tfrac{6}{6}) = 101 + 2 \cdot 65 + 3 \cdot 35 = 336,$$

eſt vero vtique $(\frac{6}{6}) = 336$.

§. 14. Reliquae proprietates redeunt ad ſummationem ſeriei, cuius terminus generalis eſt productum $(\frac{m}{x})(\frac{n}{p+x})$ Si enim loco x ordine ſcribantur numeri 0, 1, 2, 3, 4, etc. donec ad terminos euaneſcentes perveniatur, erit $\int(\frac{m}{x})(\frac{n}{p+x}) = (\frac{m+n}{23n-p})$, quae ſumma etiam eſt $= (\frac{m+n}{3m+p})$. Hinc ſi $p = 0$ orietur haec ſummatio:

$$(\tfrac{m}{0})(\tfrac{n}{0}) + (\tfrac{m}{1})(\tfrac{n}{1}) + (\tfrac{m}{2})(\tfrac{n}{2}) + (\tfrac{m}{3})(\tfrac{n}{3}) + \text{etc.} = (\tfrac{m+n}{3n})$$

 ſiue

ſiue etiam $=\left(\frac{m+n}{3m}\right)$. Quare ſi inſuper fuerit $m=n$, orietur haec ſummatio:

$$\left(\frac{n}{0}\right)^2+\left(\frac{n}{1}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{3}\right)^2+\left(\frac{n}{4}\right)^2+\text{etc.}=\left(\frac{2n}{3n}\right).$$

Ita ſi fuerit $n=1$ erit

$$1^2+1^2+1^2+1^2=\left(\frac{2}{3}\right)=4.$$

Deinde ſi $n=2$ erit

$$1^2+2^2+3^2+4^2+3^2+2^2+1^2=\left(\frac{4}{6}\right)=44.$$

Porro ſi $n=3$ erit

$$1^2+3^2+6^2+10^2+12^2+12^2+10^2+6^2+3^2+1=\left(\frac{6}{9}\right)=580.$$

IV. De vnciis Polynomii cuiuscunque $(1+z+zz+z^3\ .\ .\ .\ .\ .+z^\lambda)^n$.

§. 16. Facta euolutione huius poteſtatis deſignet iſte character $\left[\frac{p}{n}\right]$ coefficientem poteſtatis z^p, ita vt ſit

$$(1+z+zz+\ .\ .\ .\ .\ .+z^\lambda)^n$$
$$=1+\left[\frac{n}{1}\right]z+\left[\frac{n}{2}\right]zz+\left[\frac{n}{3}\right]z^3+\left[\frac{n}{4}\right]z^4\ .\ .+\left[\frac{n}{p}\right]z^p$$

vnde quia vltimus terminus huius poteſtatis eſt $z^{\lambda n}$, erit $\left[\frac{n}{\lambda n}\right]=1$; quamobrem manifeſtum eſt, ſi fuerit vel p numerus negatiuus vel numerus maior quam λn, perpetuo fore $\left[\frac{n}{p}\right]=0$; deinde quia hi coefficientes pariter ordine retrogrado gaudent, erit $\left[\frac{n}{\lambda n-p}\right]=\left[\frac{n}{p}\right]$. Porro perſpicuum eſt fore vt ſupra $\left[\frac{n}{0}\right]=1$ et $\left[\frac{n}{1}\right]=n$. Caeterum in genere nullam formulam pro ſingulis poteſtatibus adiicere licet.

§. 16. Lex autem, qua termini huius ſeriei:

$$\left[\frac{n}{0}\right]+\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\text{etc.}$$

ex praecedentibus determinantur, ſequenti formula includi poteſt:

$$\left[\frac{n}{p+\lambda}\right] = \frac{n+1-p-\lambda}{p+\lambda}\left[\frac{n}{p+\lambda-1}\right] + \frac{2(n+1)-p-\lambda}{p+\lambda}\left[\frac{n}{p+\lambda-2}\right]$$
$$+ \frac{3(n+1)-p-\lambda}{p+\lambda}\left[\frac{n}{p+\lambda-3}\right] \ldots\ldots + \frac{\lambda(n+1)-p-\lambda}{p+\lambda}\left[\frac{n}{p}\right],$$

quae expreſſio, ſi loco $p+\lambda$ ſcribamus ſimpliciter p, induet hanc formam:

$$\left[\frac{n}{p}\right] = \frac{n+1-p}{p}\left[\frac{n}{p-1}\right] + \frac{2(n+1)-p}{p}\left[\frac{n}{p-2}\right] + \frac{3(n+1)-p}{p}\left[\frac{n}{p-3}\right]$$
$$+ \frac{4(n+1)-p}{p}\left[\frac{n}{p-4}\right] + \ldots \frac{\lambda(n+1)-p}{p}\left[\frac{n}{p-\lambda}\right].$$

Huius formulae ope ſinguli ſeriei termini facile formari poterunt: quia enim nouimus eſſe $\left[\frac{n}{0}\right] = 1$, antecedentes vero omnes $= 0$, pro formatione ſingulorum terminorum habebimus:

$$\left[\frac{n}{1}\right] = \frac{n}{1}\left[\frac{n}{0}\right]$$
$$\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}\left[\frac{n}{1}\right] + \frac{2n}{2}\left[\frac{n}{0}\right]$$
$$\left[\frac{n}{3}\right] = \frac{n-2}{3}\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{2n-1}{3}\left[\frac{n}{1}\right] + \frac{3n}{3}\left[\frac{n}{0}\right]$$
$$\left[\frac{n}{4}\right] = \frac{n-3}{4}\left[\frac{n}{3}\right] + \frac{2n-2}{4}\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{3n-1}{4}\left[\frac{n}{1}\right] + \frac{4n}{4}\left[\frac{n}{0}\right]$$
$$\left[\frac{n}{5}\right] = \frac{n-4}{5}\left[\frac{n}{4}\right] + \frac{2n-3}{5}\left[\frac{n}{3}\right] + \frac{3n-2}{5}\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{4n-1}{5}\left[\frac{n}{1}\right] + \frac{5n}{5}\left[\frac{n}{0}\right].$$

Hic autem probe obſeruandum eſt, has formulas non vltra λ terminos continuari debere, quandoquidem pro formula generali $\left[\frac{n}{p}\right]$ vltimum membrum vidimus eſſe

$$= \frac{\lambda(n+1)-p}{p}\left[\frac{n}{p-\lambda}\right].$$

§. 17. Quodſi porro hinc ad poteſtatem ſequentem, cuius exponens eſt $n+1$, progredi velimus, vbi poteſtatis z^p coefficiens eſt $\left[\frac{n+1}{p}\right]$ ex ipſa formatione harum poteſtatum manifeſtum eſt fore,

$\left[\frac{n+1}{p}\right]$

$$\left[\frac{n+1}{p}\right] = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p-1}\right] + \left[\frac{n}{p-2}\right] + \left[\frac{n}{p-3}\right] \dots + \left[\frac{n}{p-\lambda}\right].$$

Quodſi iam hic loco $\left[\frac{n}{p}\right]$ ſcribamus valorem ante exhibitum, prodibit ſequens aequatio:

$$\left[\frac{n+1}{p}\right] = \frac{n+1}{p}\left[\frac{n}{p+1}\right] + \frac{2(n+1)}{p}\left[\frac{n}{p-2}\right] + \frac{3(n+1)}{p}\left[\frac{n}{p-3}\right] \dots + \frac{\lambda(n+1)}{p}\left[\frac{n}{p-\lambda}\right],$$

vbi terminorum numerus itidem eſt $= \lambda$.

§. 18. Quodſi iam hinc pariter ſeriem formemus, cuius terminus generalis ſit productum $\left[\frac{m}{x}\right]\left[\frac{n}{p+x}\right]$, cuius ergo ipſi termini ſinguli reperiuntur, ſi loco x ordine ſcribantur numeri 0, 1, 2, 3, 4, etc. donec perueniatur ad terminos euaneſcentes, id quod eueniet, quando x vel vltra λm vel vltra $\lambda n - p$ augetur; tum totius ſeriei ſumma erit $= \left[\frac{m+n}{\lambda n - p}\right]$, vel etiam $\left[\frac{m+n}{\lambda m + p}\right]$, quae ſummatio ita repraeſentari poterit:

$$\int \left[\frac{m}{x}\right]\left[\frac{n+1}{p+x}\right] = \left[\frac{m+n}{\lambda n - p}\right] = \left[\frac{m+n}{\lambda m + p}\right],$$

ipſa autem progreſſio his conſtabit terminis:

$$\left[\frac{m}{0}\right]\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{m}{1}\right]\left[\frac{n}{p+1}\right] + \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{p+2}\right] + \left[\frac{m}{3}\right]\left[\frac{n}{p+3}\right] + \text{etc.}$$

Quodſi ergo fuerit $p = 0$ et $m = n$, ſinguli ſeriei termini fiunt quadrata, ſcilicet habebitur iſta ſeries:

$$\left[\frac{n}{0}\right]^2 + \left[\frac{n}{1}\right]^2 + \left[\frac{n}{2}\right]^2 + \left[\frac{n}{3}\right]^2 + \left[\frac{n}{4}\right]^2 + \text{etc.}$$

cuius ſumma erit $= \left[\frac{2n}{\lambda n}\right]$. Hoc ſcilicet caſu ambae formulae in vnam coaleſcunt.

§. 19. Hoc igitur modo inſignes illae proprietates, quas non ita pridem ſuper vnciis Binomii demonſtraui, extendi poſſunt tam ad trinomia et quadrinomia quam ad Polynomia cuiuscunque ordinis; et quemadmodum easdem

dem has proprietates pro Binomio oſtendi etiam locum habere, quando exponentes m et n ſunt vel numeri negatiui, vel adeo numeri fracti, eadem proprietas pro Polynomiis quibusque locum habere deprehenditur; quod quidem non tam facile perſpicitur, propterea quod euolutio poteſtatis

$$(1 + z + z^2 + z^3 \ldots \ldots + z^\lambda)^n,$$

quando exponens n eſt vel numerus negatiuus vel fractus, multo magis euadit perplexa, neque etiam interpolationem admittit, quemadmodum id pro caſu Binomii praeſtare licuit, vbi ſi $\left[\frac{n}{p}\right]$ deſignet vnciam poteſtatis z^p, quae ex euolutione dignitatis $(1 + z)^n$ oritur, oſtendi ſi breuitatis gratia ſtatuatur $l\frac{1}{x} = u$, ſemper fore

$$\left[\frac{n}{p}\right] = \frac{\int u^n\,dx}{\int u^p\,dx \int u^{n-p}\,dx},$$

ſi ſcilicet haec integralia ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extendantur. Pro interpolatione enim monſtraui eſſe

$$\int \frac{dx}{\sqrt{u}} = \sqrt{\pi} \text{ et } \int dx \sqrt{u} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

denotante ſcilicet π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$.

SOLVTIO PROBLEMATIS EX METHODO TANGENTIVM INVERSA.

Auctore

M. PLATZMANN.

§. 1.

Ex notis proprietatibus linearum curuarum reſpectu tangentium vel radiorum curuaturae vel aliarum huius generis affectionum, ſi quaerantur curuae his proprietatibus gaudentes, ſolutiones plerumque familias quasdam curuarum ſuppeditant, quibus iſtae proprietates tribuendae ſint. Ex hoc genere problematum illud quoque eſt, cuius nunc Solutionem exponere in animum induxi. Quaeritur autem iſto problemate curua B M ita comparata, vt ducto radio curuaturae C M ad punctum quodcumque curuae M, quae datae poſitione rectae A N in N occurrat, ſit ſemper C M : A N; in data ratione vt $m : 1$.

§. 2.

§. 2. Demiſſo e puncto M in AN perpendiculari MP, ponatur $AP = x$, $PM = y$, $CM = r$, et angulus $MNP = \Phi$, eritque ob $CM : AN = m : 1$, $r = m.AN$; cum igitur ſit $MP : PN = \text{tang.}\,\Phi : 1$ erit PN, h. e. $AN - AP = y \cot.\Phi$, ideoque $AN = x + y \cot.\Phi$, et cum ſit $r = \frac{dx}{d\Phi \,\text{ſin.}\,\Phi}$; et ſupra fuerit $r = m.AN$, habebitur aequatio $\frac{dx}{m\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi} = x + y \cot.\Phi$; hinc

$$dx = mx\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + my\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi.$$

Hic vero commodum accidit vt haec aequatio ſponte integrationem admittat. Cum enim ſit

$$d.\,x\,\text{coſ.}\,\Phi = dx\,\text{coſ.}\,\Phi - x\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi; \text{ et}$$

$$d.\,y\,\text{ſin.}\,\Phi = dy\,\text{ſin.}\,\Phi + y\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi; \text{ erit}$$

$$\int x\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi = -x\,\text{coſ.}\,\Phi + \int dx\,\text{coſ.}\,\Phi; \text{ et}$$

$$\int y\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = y\,\text{ſin.}\,\Phi - \int dy\,\text{ſin.}\,\Phi;$$

vnde ob $dx\,\text{coſ.}\,\Phi = dy\,\text{ſin.}\,\Phi$ omnino ſequitur

$$\int x\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + \int y\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = y\,\text{ſin.}\,\Phi - x\,\text{coſ.}\,\Phi:$$

et cum fuerit

$$dx = mx\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + my\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi;$$

erit integrando,

$$x + a = my\,\text{ſin.}\,\Phi - mx\,\text{coſ.}\,\Phi.$$

§. 3. Habemus ergo binas aequationes:

I. $dx = my\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi + mx\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$;

II. $x + a = my\,\text{ſin.}\,\Phi - mx\,\text{coſ.}\,\Phi$.

Multiplicetur prior harum aequationum per $\text{ſin.}\,\Phi$, poſterior per $d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$ erunt producta:

$$\text{I. } dx\,\text{ſin.}\,\Phi = my\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi + mx\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^2;$$

$$\text{II. } (x+a)\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = my\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - mx\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^2;$$

hinc I — II. erit

$$dx\,\text{ſin.}\,\Phi - (x+a)\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = mx\,d\Phi.$$

Vt haec aequatio ad integrationem aptior reddatur, repraeſentetur ſub hac forma

$$dx - \frac{mx\,d\Phi\,(m + \text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi} = a\,d\Phi\,\text{cot.}\,\Phi.$$

Haec autem aequatio integrabilis euadet poſito

$$-\frac{d\Phi\,(m + \text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi} = \frac{dz}{z};$$

erit enim facta ſubſtitutione

$$dx + \frac{x\,dz}{z} = a\,d\Phi\,\text{cot.}\,\Phi, \text{ hinc}$$

$$z\,dx + x\,dz = az\,d\Phi\,\text{cot.}\,\Phi,$$

vnde integrando $xz = a\int z\,d\Phi\,\text{cot.}\,\Phi$.

§. 4. Verum cum ſit

$$\frac{dz}{z} = -\frac{d\Phi\,(m + \text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi} = -\frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} - \frac{m\,d\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi};$$

erit integrando

$$lz = -l\,\text{ſin.}\,\Phi - m\,l\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + \text{coſ.}\,\Phi}; \text{ et}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^{m+1}}{(1 + \text{coſ}\,\Phi)^m}.$$

Subſtituendo hunc valorem ipſius z in aequatione ſupra inuenta fiet

$$\frac{x\,(1 + \text{coſ.}\,\Phi)^m}{\text{ſin.}\,\Phi^{m+1}} = a\int \frac{d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi\,(1 + \text{coſ.}\,\Phi)^m}{\text{ſin.}\,\Phi^{m+2}};$$

ſiue ob $1 + \text{coſ.}\,\Phi = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^2}{1 - \text{coſ.}\,\Phi}$;

x ſin.

$$\frac{x\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-1}}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m} = a\int\frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-2}\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m};$$

vt adeo totum negotium ad integrationem formulae:

$$\frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-2}\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m}$$ ſit reductum.

§. 5. Ad hoc integrale inueniendum fingatur eius forma:

$$\int\frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-2}\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m} = \frac{\alpha\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-1}}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^{m-1}} + \frac{\beta\,\text{ſin.}\,\Phi^{m+1}}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^{m+1}} + b;$$

vnde ſumendo differentialia fiet:

$$\frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-2}\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m} = \frac{\alpha(m-1)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-2}\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^{m-1}}$$

$$-\frac{\alpha(m-1)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^m}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m} + \frac{\beta(m+1)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^m\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^{m+1}}$$

$$+\frac{\beta(m+1)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m+2}}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^{m+2}}$$

reducendo binos priores terminos ad eundem denominatorem hanc induent formam:

$$\frac{\alpha(m-1)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-2}(\text{coſ.}\,\Phi-\text{coſ.}\,\Phi^2-\text{ſin.}\,\Phi^2)}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m}$$

$$= -\frac{\alpha(m-1)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^m}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^{m-1}} \text{ ob } \text{coſ.}\,\Phi^2+\text{ſin.}\,\Phi^2 = 1.$$

Eodem modo bini poſteriores termini ad hanc reducuntur expreſſionem

$$-\frac{\beta(m+1)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^m}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^{m+1}}.$$

 Hinc

Hinc igitur erit

$$\frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-2}\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m} = -\frac{\alpha\,(m-1)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-2}}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^{m-1}}$$

$$-\frac{\beta\,(m+1)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m}}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^{m+1}}.$$

Cum vero ſit

$$\text{ſin.}\,\Phi^2 = (1+\text{coſ.}\,\Phi)\,(1-\text{coſ.}\,\Phi);\ \text{fiet}$$

$$\frac{\text{ſin.}\,\Phi^2}{1-\text{coſ.}\,\Phi} = 1+\text{coſ.}\,\Phi;\ \text{hinc}$$

$$\frac{\beta(m+1)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^m}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m} = \frac{\beta(m+1)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-2}}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m}\cdot\frac{\text{ſin.}\,\Phi^2}{1-\text{coſ.}\,\Phi}$$

$$= \frac{\beta\,(m+1)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-2}\,(1+\text{coſ.}\,\Phi)}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m}.$$

Fiet igitur

$$\frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-2}\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m} = -\frac{\alpha(m-1)d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-2}\,\text{coſ.}\,\Phi(1-\text{coſ.}\,\Phi)}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m}$$

$$-\frac{\beta\,(m+1)\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{m-2}\,(1+\text{coſ.}\,\Phi)}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m};$$

ſiue

$$-\alpha\,(m-1)\,(1-\text{coſ.}\,\Phi)+\beta\,(m+1)\,(1+\text{coſ.}\,\Phi) = -1.$$

Quae aequalitas ſubſiſtere nequit niſi ſit

$$\alpha\,(m-1)+\beta\,(m+1) = 0.$$

$$\alpha\,(m-1)-\beta\,(m+1) = 1.$$

vnde colligitur

$$\alpha = \frac{1}{2\,(m-1)};\ \ \beta = -\frac{1}{2\,(m+1)};$$

et hinc habetur integrale quaeſitum:

$\int d\Phi$

$$\int \frac{d\Phi\, \text{ſin.}\,\Phi^{m-2}\, \text{coſ.}\,\Phi}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m} = \frac{1}{2(m-1)} \cdot \frac{\text{ſin.}\,\Phi^{m-1}}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^{m-1}}$$

$$-\frac{1}{2(m+1)} \cdot \frac{\text{ſin.}\,\Phi^{m+1}}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^{m+1}} + b.$$

§. 6. Quia autem ſupra erat

$$\frac{x\, \text{ſin.}\,\Phi^{m-1}}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m} = a \int \frac{d\Phi\, \text{ſin.}\,\Phi^{m-2}\, \text{coſ.}\,\Phi}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m};$$

erit quoque

$$\frac{x\, \text{ſin.}\,\Phi^{m-1}}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m} = \frac{a}{2(m-1)} \cdot \frac{\text{ſin.}\,\Phi^{m-1}}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^{m-1}}$$

$$-\frac{a}{2(m+1)} \cdot \frac{\text{ſin.}\,\Phi^{m+1}}{(1-\text{coſ.}\,\Phi)^{m+1}} + ab.$$

Vnde

$$x = \tfrac{a}{2(m-1)}(1-\text{coſ.}\,\Phi) - \tfrac{a}{2(m+1)}(1+\text{coſ.}\,\Phi)$$

$$+\frac{ab(1+\text{coſ.}\,\Phi)^m}{\text{ſin.}\,\Phi^{m-1}} = \frac{a}{mm-1}(1-m\,\text{coſ.}\,\Phi)$$

$$+\frac{ab(1-\text{coſ.}\,\Phi)^m}{\text{ſin.}\,\Phi^{m-1}} = \frac{a}{mm-1}(1-m\,\text{coſ.}\,\Phi) + \frac{ab\,\text{ſin.}\,\Phi^{m+1}}{(1+\text{coſ.}\,\Phi)^m}.$$

Verum ſupra inuenta eſt aequatio

$$my\,\text{ſin.}\,\Phi = a + x(1+m\,\text{coſ.}\,\Phi);\ \text{ergo}$$

$$my\,\text{ſin.}\,\Phi = a + \tfrac{a}{mm-1}(1-mm\,\text{coſ.}\,\Phi^2)$$

$$+\frac{ab\,\text{ſin.}\,\Phi^{m+1}}{(1+\text{coſ.}\,\Phi)^m}(1+m\,\text{coſ.}\,\Phi) = \frac{amm\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{mm-1}$$

$$+\frac{ab\,\text{ſin.}\,\Phi^{m+1}}{(1+\text{coſ.}\,\Phi)^m}(1+m\,\text{coſ.}\,\Phi);$$

ergo

ergo diuidendo per m ſin. Φ fiet

$$y = \frac{a\,m\,\text{ſin.}\,\Phi}{m\,m-1} + \frac{a\,b\,\text{ſin.}\,\Phi^m}{m\,(1+\text{coſ.}\,\Phi)^m}(1+m\,\text{coſ.}\,\Phi).$$

Hinc coordinatae curuae quaeſitae x et y ſequentem in modum per angulum Φ exprimuntur

$$x = \frac{a}{m\,m-1}(1-m\,\text{coſ.}\,\Phi) + \frac{a\,b\,\text{ſin.}\,\Phi^{m+1}}{(1+\text{coſ.}\,\Phi)^m};$$

$$y = \frac{a\,m\,\text{ſin.}\,\Phi}{m\,m-1} + \frac{a\,b\,\text{ſin.}\,\Phi^m}{m\,(1+\text{coſ.}\,\Phi^m)}(1+m\,\text{coſ.}\,\Phi).$$

§. 7. Hinc patet, quicumque valor ipſi m tribuatur, modo fuerit rationalis, aequationem inter ipſos x et y ſemper fore algebraicam niſi ſit $m = 1$, de quo caſu infra ſpeciatim agemus. Quamuis autem non ſine labore valde operoſo per eliminationem anguli Φ, aequatio inter x et y exhiberi queat, tamen pro hoc inſtituto notari conuenit eſſe:

$$\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1+\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{1-\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi} = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi, \text{ item}$$

$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi}{1+\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi^2}.$$

His igitur valoribus ſubſtitutis in expreſſionibus pro x et y; habebimus

$$x(1+\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2) = \tfrac{a}{m-1}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2 - \tfrac{a}{m+1} + 2\,b\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^{m+1};$$

$$y(1+\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2) = \tfrac{2\,a\,m}{m\,m-1}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi$$
$$+ \tfrac{b}{m}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^m\,(1+m+(m-1)\,\text{tang.}\,\Phi^2).$$

Tumque erit

$$2\,m\,y\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi = a(1+\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2) + x(1+m-(m-1)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2).$$

ex qua aequatione quadratica tang. $\frac{1}{2}\Phi$ per x et y exprimi poteſt.

§. 8. Cum in expreſſionibus pro x et y inuentis binae conſtantes arbitrariae a et b, inſint, prout his conſtantibus alii atque alii valores tribunatur, etiam infinitae prodeunt curuae, quae tamen omnes quandam affinitatem inter ſe habere cenſendae ſunt. Pro caſu ſimpliciſſimo $b = 0$, fiet

$$x = \frac{a}{m^2-1}(1 - m \operatorname{cof.} \Phi);\ y = \frac{ma}{m^2-1} \operatorname{fin.} \Phi;$$

ſiue poſito breuitatis gratia

$$\frac{a}{mm-1} = c;\ 1 - \frac{x}{c} = m \operatorname{cof.} \Phi;\ \frac{y}{c} = m \operatorname{fin.} \Phi;$$

vnde fiet

$$(1 - \frac{x}{c})^2 + \frac{y^2}{c^2} = m^2 \operatorname{cof.} \Phi^2 + m^2 \operatorname{fin.} \Phi^2 = m^2;$$

quae aequatio eſt pro circulo. Sponte autem liquet circulum Problemati ſatisfacere, quia origo abſciſſarum ita aſſumi poteſt, vt ſit eius diſtantia a centro circuli ad radium in data ratione $m : 1$.

§. 9. Nunc igitur ſupereſt vt caſum quoque expendamus quo $m = 1$, cum iſto caſu integratio formula $\frac{d\Phi \operatorname{fin.} \Phi^{m-2} \operatorname{cof.} \Phi}{(1 - \operatorname{cof.} \Phi)^m}$ per quantitates algebraicas non ſuccedat. Pro integranda autem formula $\frac{d\Phi \operatorname{cof.} \Phi}{(1 - \operatorname{cof.} \Phi) \operatorname{fin.} \Phi}$, notemus eſſe $\operatorname{cof.} \Phi = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{cof.} \Phi) - \frac{1}{2}(1 - \operatorname{cof.} \Phi)$ hinc

$$\frac{d\Phi \operatorname{cof.} \Phi}{(1 - \operatorname{cof.} \Phi) \operatorname{fin.} \Phi} = \frac{d\Phi (1 + \operatorname{cof.} \Phi)}{2(1 - \operatorname{cof.} \Phi) \operatorname{fin.} \Phi} - \frac{d\Phi}{2 \operatorname{fin.} \Phi} = \frac{d\Phi \operatorname{fin.} \Phi}{2(1 - \operatorname{cof.} \Phi)^2} - \frac{d\Phi}{2 \operatorname{fin.} \Phi}.$$

Prioris termini integrale eſt $-\frac{1}{2(1 - \operatorname{cof.} \Phi)}$ et poſterioris $-\frac{1}{2} l \frac{\operatorname{fin.} \Phi}{1 + \operatorname{cof.} \Phi}$; ideoque ob

$$\frac{x}{1 - \operatorname{cof.} \Phi} = a \int \frac{d\Phi \operatorname{cof.} \Phi}{(1 - \operatorname{cof.} \Phi) \operatorname{fin.} \Phi} \text{ erit}$$

$$\frac{x}{1 - \operatorname{cof.} \Phi} = -\frac{a}{2(1 - \operatorname{cof.} \Phi)} - \frac{1}{2} a\, l \frac{\operatorname{fin.} \Phi}{1 + \operatorname{cof.} \Phi} + b; \text{ ſiue}$$

$$2x + a = b(1 - \text{coſ.}\,\Phi) - a(1 - \text{coſ.}\,\Phi)\,l\,\frac{\text{coſ.}\,\Phi}{1 + \text{coſ.}\,\Phi}.$$

Quod ſi huic aequationi jungatur iſta

$$x + a = y\,\text{ſin.}\,\Phi - x\,\text{coſ.}\,\Phi;$$

ex qua fit

$$x(1 + \text{coſ.}\,\Phi) = y\,\text{ſin.}\,\Phi - a;$$

$$2y\,\text{ſin.}\,\Phi - 2a + a(1 + \text{coſ.}\,\Phi) = b(1 - \text{coſ.}\,\Phi^2)$$
$$- a(1 - \text{coſ.}\,\Phi^2)\,l\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + \text{coſ.}\,\Phi},$$

quae ad hanc reducitur:

$$2y\,\text{ſin.}\,\Phi - a(1 - \text{coſ.}\,\Phi) = b\,\text{ſin.}\,\Phi^2 - a\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,l\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + \text{coſ.}\,\Phi}$$

ergo

$$2y = \frac{a(1 - \text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi} + b\,\text{ſin.}\,\Phi - a\,\text{ſin.}\,\Phi\,l\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + \text{coſ.}\,\Phi}.$$

§. 10. Ex his expreſſionibus pro x et y liquet vtramque per angulum Φ exqrimi poſſe in quibus vero expreſſionibus praeter quantitates algebraicas ipſe Logarithmus $\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + \text{coſ.}\,\Phi} = l\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi$ in greditur; vnde patet curuam quaeſitam eſſe tranſcendentem, excepto caſu ſimpliciſſimo, quo $a = 0$ tum enim fiet

$$2x = b(1 - \text{coſ.}\,\Phi)\quad 2y = b\,\text{ſin.}\,\Phi;\ \text{hinc}$$
$$\text{coſ.}\,\Phi = \frac{b - 2x}{b};\ \text{ſin.}\,\Phi = \frac{2y}{b};\ \text{ergo}$$
$$\text{coſ.}\,\Phi^2 + \text{ſin.}\,\Phi^2 = \frac{(b - 2x)^2 + 4y^2}{b^2} = 1;$$

aequatio pro circulo.

Iam vero hoc quoque notari meretur, pro caſu $m = 1$ aequationem qua tang. $\frac{1}{2}\Phi$ per x et y quaeritur fore;

$$2y\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi = a(1 + \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2) + 2x,$$

ſiue

ſiue loco a adhibendo $2a$,

$$1 + \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2 - \tfrac{y}{a}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{x}{a} = 0.$$

§. 11. Si iuncta AM dicatur v, et ducta AQ e puncto A ad CM normali dicatur MQ, s quia

$$AN = x + \frac{y\,dy}{dx} = \frac{x\,dx + y\,dy}{dx} = \frac{v\,dv}{dx},$$

tumque per proprietatem curuorum cognitam $r = \frac{v\,dv}{ds}$, atque per hypotheſin ſit $r = m.AN$, fiet $\frac{m\,v\,dv}{dx} = \frac{v\,dv}{ds}$, vnde colligitur $m\,ds = dx$, ſiue $ms = x + a$; vnde concinna deduci poterit Methodus ducendi normalem ad curuam in puncto M. Nam ſi ſuper AM ceu Diametro deſcribatur circulus, et in illo circulo aptetur linea $MQ = \frac{x+a}{m}$; ipſa illa recta MQ erit normalis ad curuam in puncto M.

§. 12. Solutioni Problematis modo allatae nunc quoque alteram haud parum elegantem adiungere licebit. Ducatur etenim e centro curuaturae C ad axem AP normalis CT, et ponatur $AT = u$, $CT = t$ eritque

$$TN = AT - AN, = t\,\text{cot.}\,\Phi;$$

ideoque ſumtis differentialibus

$$d.AT = \frac{t\,d\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi^2},\ (\text{ob}\ d.AT = dt\,\text{cot.}\,\Phi).$$

Cum igitur per hypotheſin ſit $dr = m\,d.AN$ atque in triangulo elementari Ccc ſit $Cc : cc = 1 : \text{ſin.}\,TNE$, erit

$$Cc = \frac{cc}{\text{ſin.}\,TNE};\ \text{h. e.}\ dr = \frac{dt}{\text{ſin.}\,\Phi} = \frac{m\,t\,d\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi^2},$$

ergo $\frac{dt}{t} = \frac{m\,d\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi}$ et integrando $l\,\frac{t}{c} = m\,l\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + \text{coſ.}\,\Phi}$; ſiue

$$\frac{t}{c} = \left(\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + \text{coſ.}\,\Phi}\right)^m = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^m.$$

Cum autem ſit $du = dt\,\text{cot.}\,\Phi$, et ſupra erat

$d t = \frac{m t d \Phi}{ſin. \Phi}$ erit

$d u = \frac{m t d \Phi \, coſ. \Phi}{ſin. \Phi^2}$;

et loco t ſubſtituendo eius valorem modo inuentum

$c \left(\frac{ſin. \Phi}{1 + coſ. \Phi} \right)^m$; fiet

$$\frac{d u}{c} = \frac{m \, d \Phi \, ſin. \Phi^{m-2} \, coſ. \Phi}{(1 + coſ. \Phi)^m}.$$

§. 13. Haec formula cum prorſus ſit ſimilis illi cuius integrationem §. 5. abſoluimus, huius integratio quoque eodem modo peragetur, ita vt ſit:

$$\int \frac{d \Phi \, ſin. \Phi^{m-2} \, coſ. \Phi}{(1 + coſ. \Phi)^m} = \frac{1}{2(m-1)} \frac{ſin. \Phi^{m-1}}{(1 + coſ. \Phi)^{m+1})}$$

$$- \frac{1}{2(m+1)} \frac{ſin. \Phi^{m+1}}{(1 + coſ. \Phi)^{m+1}} + g.$$

Hinc ergo fiet

$$\frac{u-g}{m c} = \frac{1}{2(m-1)} \frac{ſin. \Phi^{m-1}}{(1 + coſ. \Phi)^{m-1}} - \frac{1}{2(m+1)} \frac{ſin. \Phi^{m+1}}{(1 + coſ. \Phi)^{m+1}};$$

$$= \left(\frac{1 + m \, coſ. \Phi}{m m - 1} \right) \frac{ſin. \Phi^{m-1}}{(1 + coſ. \Phi)^m},$$

ita vt ambae coordinatae, u, t, pro euoluta curuae quaeſitae B M, per angulum Φ exprimantur. Verum cum ſit

$\frac{ſin. \Phi}{1 + coſ. \Phi} = \left(\frac{t}{c} \right)^{\frac{1}{m}}$, fiiet quoque

$$\frac{u-g}{m c} = \frac{1}{2(m-1)} \left(\frac{t}{c} \right)^{\frac{m-1}{m}} - \frac{1}{2(m+1)} \left(\frac{t}{c} \right)^{\frac{m+1}{m}}.$$

§. 14

§. 14. His inuentis diſpiciendum eſt, vtrum expreſſiones pro x et y hinc eliciendae, cum illis conſentiant quas ſupra inuenimus. Quia

$$r = m(u - t \operatorname{coſ.} \Phi) = \frac{m^2 c}{mm-1} \frac{(1 + m \operatorname{coſ.} \Phi)}{(1 + \operatorname{coſ.} \Phi)^m} \operatorname{ſin.} \Phi^{m-1}$$
$$- \frac{m c \operatorname{coſ.} \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^{m+1}}{(1 + \operatorname{coſ.} \Phi)^m} + m g, \text{ h. e.}$$
$$r = \frac{m c (m + \operatorname{coſ.} \Phi)}{mm-1} \cdot \frac{\operatorname{ſin.} \Phi^{m-1}}{(1 + \operatorname{coſ.} \Phi)^m} + m g;$$

erit

$$r \operatorname{coſ.} \Phi = \frac{m c \operatorname{coſ.} \Phi (m + \operatorname{coſ.} \Phi)}{mm-1} \cdot \frac{\operatorname{ſin.} \Phi^{m-1}}{(1 + \operatorname{coſ.} \Phi)^m} + m g \operatorname{coſ.} \Phi.$$

Hinc

$$x = u - r \operatorname{coſ.} \Phi = \frac{m c (1 + m \operatorname{coſ.} \Phi)}{mm-1} \frac{\operatorname{ſin.} \Phi^{m-1}}{(1 + \operatorname{coſ.} \Phi)^m}$$
$$- \frac{m c \operatorname{coſ.} \Phi}{mm-1} \frac{(m + \operatorname{coſ.} \Phi) \operatorname{ſin.} \Phi^{m-1}}{(1 + \operatorname{coſ.} \Phi)^m} + g(1 - m \operatorname{coſ.} \Phi),$$

hoc eſt

$$x = \frac{m c}{mm-1} \cdot \operatorname{ſin.} \Phi \left(\frac{\operatorname{ſin.} \Phi}{1 + \operatorname{coſ.} \Phi}\right)^{m-1} + g(1 - m \operatorname{coſ.} \Phi),$$

quae expreſſio cum ſupra inuenta §. 6. omnino conſentit, modo ponatur $b = \frac{mc}{mm-1}$, $a = g(m^2 - 1)$. Et cum ſit $r \operatorname{ſin.} \Phi - t$, erit

$$y = m g \operatorname{ſin.} \Phi + \frac{m^2 c}{mm-1} (1 + m \operatorname{coſ.} \Phi) \left(\frac{\operatorname{ſin.} \Phi}{1 + \operatorname{coſ.} \Phi}\right)^m$$
$$- m c \operatorname{coſ.} \Phi \left(\frac{\operatorname{ſin.} \Phi}{1 + \operatorname{coſ.} \Phi}\right)^m - c \left(\frac{\operatorname{ſin.} \Phi}{1 + \operatorname{coſ.} \Phi}\right)^m$$
$$= m e \operatorname{ſin.} \Phi + \frac{e}{mm-1} (1 + m \operatorname{coſ.} \Phi) \left(\frac{\operatorname{ſin.} \Phi}{1 + \operatorname{coſ.} \Phi}\right)^m,$$

quae aequatio cum ſuperius inuenta omnino conſentit.

§. 15. Cum ſit

$$\frac{\sin.\Phi}{1+\cos.\Phi} = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi = \left(\frac{t}{c}\right)^{\frac{1}{m}}, \text{ fiet}$$

$$\frac{1}{\sin.\Phi} = \frac{1+\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi^2}{2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{t}{c}\right)^{\frac{-1}{m}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{t}{c}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\cos.\Phi = \frac{1-\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi^2}{1+\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi^2} = \frac{\left(\frac{t}{c}\right)^{\frac{-1}{m}} - \left(\frac{t}{c}\right)^{\frac{1}{m}}}{\left(\frac{t}{c}\right) + \left(\frac{t}{c}\right)^{\frac{1}{m}}},$$

quae expreſſiones imprimis inſeruirent exhibendo valores coordinatarum x et y, per ordinatam euolutae t, verum cum formulae hinc oriundae parum concinnae ſint, iis euoluendis immorari haud libet.

§. 16. Pro caſu $m = 1$, fiet $du = \frac{c\,d\Phi\,\cos.\Phi}{\sin.\Phi\,(1+\cos.\Phi)}$, ideoque cum ſit

$$\cos.\Phi = \tfrac{1}{2}(1+\cos.\Phi) - \tfrac{1}{2}(1-\cos.\Phi)$$

erit

$$\frac{du}{c} = \frac{d\Phi}{2\sin.\Phi} - \frac{d\Phi\,(1-\cos.\Phi)}{2\sin.\Phi\,(1+\cos.\Phi)} = \frac{d\Phi}{2\sin.\Phi} - \frac{d\Phi\,\sin.\Phi}{2\,(1+\cos.\Phi)^2} \text{ ob}$$

$$\frac{\sin.\Phi}{1+\cos.\Phi} = \frac{1-\cos.\Phi}{\sin.\Phi}.$$

Hinc autem integratione colligitur

$$\frac{u-g}{c} = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\sin.\Phi}{1+\cos.\Phi} - \frac{1}{2\,(1+\cos.\Phi)}.$$

Inde autem prodit

$$r = u - t\cot.\Phi = \tfrac{1}{2}c\cos.\Phi\;l\,\frac{\sin.\Phi}{1+\cos.\Phi} - \frac{c\,(1\ \cos.\Phi)}{2\,(1+\cos.\Phi)}$$

$$- \frac{c\cos.\Phi^2}{1+\cos.\Phi} + g\cos.\Phi, \text{ et}$$

$$x = u - r\,\text{coſ.}\,\Phi = \tfrac{1}{2}c\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi)\,l\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + \text{coſ.}\,\Phi}$$
$$+ \frac{c\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi)}{2\,(1 + \text{coſ.}\,\Phi)} + \frac{c\,\text{coſ.}\,\Phi^2}{1 + \text{coſ.}\,\Phi} + g\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi)$$
$$= \tfrac{1}{2}c(1 - \text{coſ.}\,\Phi)\,l\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + \text{coſ.}\,\Phi} + (g - c)(1 - \text{coſ.}\,\Phi) + \tfrac{c}{2},$$

et ſimiliter fiet

$$y = r\,\text{ſin.}\,\Phi - t - = \tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\,\Phi\,l\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + \text{coſ.}\,\Phi}$$
$$- \frac{c\,\text{ſin.}\,\Phi}{2\,(1 + \text{coſ.}\,\Phi)} + (g - c)\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

quarum formularum conſenſus cum ſupra allatis eſt manifeſtus.

§. 17. Ex inuentis elegans deducitur conſtructio, pro radio curuaturae euolutae ad punctum C. Sit enim C O radius iſte curuaturae, et iungatur c O; erit ob angulum C O c = M c m; M m : C c = M C : C O, ideoque ſi per N ducatur ad C M perpendicularis M R, quae rectis $m\,c$, C T in S et R occurrant, erit

$$\text{M}\,m : \text{N}\,s = \text{MC} : \text{NC} \text{ et}$$
$$\text{N}\,s : \text{N}\,n = \text{NC} : \text{CR}$$

ergo componendo rationes M m : M n = N C : C R ideoque ob C c: M m = C O : M C, erit ex aequo

$$\text{C}\,c : \text{N}\,n = \text{CO} : \text{CR};$$

atque per hypotheſin ratio differentialium C c : N n = m : 1 ergo C O : C R = m : 1; h. e.

$$\text{CO} = m.\,\text{CR} = \frac{m\,\text{NC}^2}{\text{CT}};$$

vnde patet quod ſi ad ordinatam: C T et tangentem N O quaeratur tertia proportionalis C R; fore radium curuaturae C O ad ipſam C R in data ratione m : 1.

INTE-

INTEGRATIO
FORMVLAE CVIVSDAM DIFFERENTIALIS
PER
LOGARITHMOS ET ARCVS CIRCVLARES.

Auctore
A. J. LEXELL.

§. 1.

Formulae differentiales, quas irrationalia altiorum ordinum, vtpote radices cubicae, vel biquadraticae, vel altiorum adhuc poteſtatum ingrediuntur, plerumque pro integratione quadraturas altiorum ordinum quam iſtas circuli et hyperbolae requirunt. Attentione igitur maxime digni ii videntur eſſe caſus, quibus differentialia huius generis per arcus circulares et Logarithmos integrationem admittunt, vtcunque arctiſſimis limitibus caeteroquin circumſcribantur. Ex eo genere iſta formula $\frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$, tanto maiorem attentionem meretur, quod ſummus noſter *Eulerus*,

Eulerus, eius integrationem inter difficiliores reputauerit; et hanc ob rationem quae de integratione iſtius formulae, tum temporis quando Illuſtris *Eulerus* in ea examinanda occupatus erat, ego quoque meditatus ſum, heic proponere non dubito.

§. 2. Ponatur $\tan z^4 = 2x^2 - 1$, ita vt ſit

$\tan z = \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}$, hinc fiet

$$x^2 = \frac{1 + \tan z^4}{2} = \frac{\cos z^4 + \sin z^4}{2\cos z^4} = \frac{2\cos z^4 - 2\cos z^2 + 1}{2\cos z^4},$$

ob $\sin z^2 = 1 - \cos z^2$, tumque denuo $x^2 = \frac{1 + \cos 2z^2}{4\cos z^4}$, ſiquidem $2\cos z^2 - 1 = \cos 2z$; deinde differentiando fiet

$$x\,dx = \frac{dz \tan z^3}{\cos z^2} \text{ et } \frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{dz.\tan z^2}{x(1+x)\cos z^2};$$

hinc quum ſit $x = \frac{\sqrt{(1 + \cos 2z^2)}}{2\cos z^2}$, erit

$$1 + x = \frac{2\cos z^2 + \sqrt{(1 + \cos 2z^2)}}{2\cos z^2} = \frac{1 + \cos 2z + \sqrt{(1 + \cos 2z^2)}}{2\cos z^2},$$

tumque fiet

$$x(1+x) = \frac{\sqrt{(1 + \cos 2z^2)}}{4\cos z^4}\left(2\cos z^2 + \sqrt{(1 + \cos 2z^2)}\right),$$

vnde ſubſtituto hoc valore oblinetur

$$\frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{4dz.\sin z^2}{\sqrt{(1+\cos 2z^2)}\,(2\cos z^2 + \sqrt{(1+\cos 2z^2)})}.$$

Haec autem formula ſi ſimul multiplicetur et diuidatur per $2\cos z^2 - \sqrt{(1 + \cos 2z^2)}$, abit in iſtam:

$$\frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{4dz.\sin z^2\,(2\cos z^2 - \sqrt{(1+\cos 2z^2)})}{(4\cos z^4 - 1 - \cos 2z^2)\sqrt{(1+\cos 2z^2)}}$$

$$= \frac{2dz \sin z^2\,(2\cos z^2 - \sqrt{(1+\cos 2z^2)})}{\cos 2z\,\sqrt{(1+\cos 2z^2)}}, \text{ ob}$$

$$4\cos z^4 = (1 + \cos 2z)^2 = 1 + 2\cos 2z + \cos 2z^2;$$

hinc igitur deducitur:

$$\frac{dx}{(1+x)\surd(2x^2-1)} = \frac{4\,dz\,\text{ſin.}\,z^2\,\text{coſ.}\,z^2}{\text{coſ.}\,2z\,\surd(1+\text{coſ.}\,2z^2)} - \frac{2\,dz\,\text{ſin.}\,z^2}{\text{coſ.}\,2z}.$$

Vbi quidem ſtatim patet pro parte ſecunda adhiberi poſſe

$$dz\frac{(\text{coſ.}\,2z-1)}{\text{coſ.}\,2z} = dz - \frac{dz}{\text{coſ.}\,2z},$$

cuius integrale eſt

$$z - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{L}\left(\frac{1+\text{ſin.}\,2z}{\text{coſ.}\,2z}\right) = z - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{L}\left(\frac{1+\text{ſin.}\,2z}{1-\text{ſin.}\,2z}\right).$$

§. 3. Pro parte prima

$$\frac{4\,dz.\,\text{ſin.}\,z^2\,\text{coſ.}\,z^2}{\text{coſ.}\,2z\,\surd(1+\text{coſ.}\,2z^2)} = \frac{dz.\,\text{ſin.}\,2z^2}{\text{coſ.}\,2z\,\surd(1+\text{coſ.}\,2z^2)},$$

ponatur $\text{coſ.}\,2z^2 = \text{coſ.}\,u$, eritque

$4\,dz\,\text{ſin.}\,2z\,\text{coſ.}\,2z = du\,\text{ſin.}\,u$ et

$\frac{dz.\,\text{ſin.}\,2z}{\text{coſ.}\,2z} = \tfrac{1}{4}\,du.\,\text{tang.}\,u$; porro fit

$\text{ſin.}\,2z^2 = 1 - \text{coſ.}\,u = 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u^2$ et

$1 + \text{coſ.}\,2z^2 = 1 + \text{coſ.}\,u = 2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}u^2$,

quamobrem erit

$\text{ſin.}\,2z = \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u\surd 2$ et $\surd(1+\text{coſ.}\,2z^2) = \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}u\surd 2$,

ideoque his valoribus ſubſtitutis

$$\frac{dz.\,\text{ſin.}\,2z^2}{\text{coſ.}\,2z\,\surd(1+\text{coſ.}\,2z^2)} = \tfrac{1}{4}\,du\,\text{tang.}\,u\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}u,$$

vnde ob $\frac{\text{ſin.}\,u}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}u} = 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u$, fit

$$\frac{dz.\,\text{ſin.}\,2z^2}{\text{coſ.}\,2z\,\surd(1+\text{coſ.}\,2z^2)} = \tfrac{1}{4}\,du.\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}u^2}{\text{coſ.}\,u} = \tfrac{1}{4}\,du\frac{(1-\text{coſ.}\,u)}{\text{coſ.}\,u}$$

$$= \frac{du}{4\,\text{coſ.}\,u} - \tfrac{1}{4}\,du,$$

cuius integrale eſt $\tfrac{1}{8}\,\mathrm{L}\left(\frac{1+\text{ſin.}\,u}{1-\text{ſin.}\,u}\right) - \tfrac{1}{4}u$. Ideoque collectim ſumendo habebimus integrale quaeſitum:

$$z - \tfrac{1}{4}u - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{L}\left(\frac{1+\text{ſin.}\,2z}{1-\text{ſin.}\,2z}\right) + \tfrac{1}{8}\,\mathrm{L}\left(\frac{1+\text{ſin.}\,u}{1-\text{ſin.}\,u}\right).$$

§. 4. Nunc igitur viciſſim determinari poteſt, quomodo hoc integrale per incognitam x exprimatur. Quia igitur $\text{tang.}\, z = \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}$, fiet

$$z = \text{arc. tang.} \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}$$

et quum ſit

$$\text{coſ.}\, 2z = \text{coſ.}\, z^2 - \text{ſin.}\, z^2 = \frac{1 - \text{tang.}\, z^2}{1 + \text{tang.}\, z^2}, \text{ fiet}$$

$$\text{coſ.}\, 2z = \frac{1 - \sqrt{(2x^2 - 1)}}{1 + \sqrt{(2x^2 - 1)}}, \text{ hinc}$$

$$1 + \text{coſ.}\, 2z^2 = \frac{4x^2}{(1 + \sqrt{(2x^2 - 1)})^2}, \text{ tumque}$$

$$\sqrt{(1 + \text{coſ.}\, 2z^2)} = \frac{2x}{1 + \sqrt{(2x^2 - 1)}}, \text{ nec non}$$

$$\text{ſin.}\, 2z = \sqrt{(1 - \text{coſ.}\, 2z^2)} = \frac{2\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{1 + \sqrt{(2x^2 - 1)}},$$

hinc deducitur

$$\text{tang.}\, \tfrac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 - \text{coſ.}\, u}{1 + \text{coſ.}\, u}} = \sqrt{\frac{1 - \text{coſ.}\, 2z^2}{1 + \text{coſ.}\, 2z^2}} = \frac{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{x} \text{ et}$$

$$\tfrac{1}{2} u = \text{arc. tang.} \frac{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{x}.$$

Deinde patet eſſe:

$$\frac{1 + \text{ſin.}\, 2z}{1 - \text{ſin.}\, 2z} = \frac{1 + 2\sqrt[4]{(2x^2 - 1)} + \sqrt{(2x^2 - 1)}}{1 - 2\sqrt[4]{(2x^2 - 1)} + \sqrt{(2x^2 - 1)}} = \frac{(1 + \sqrt[4]{(2x^2 - 1)})^2}{(1 - \sqrt[4]{(2x^2 - 1)})^2}$$

hincque

$$\sqrt{\left(\frac{1 + \text{ſin.}\, 2z}{1 - \text{ſin.}\, 2z}\right)} = \frac{1 + \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{1 - \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}} \text{ et}$$

$$\tfrac{1}{2} L\left(\frac{1 + \text{ſin.}\, z}{1 - \text{ſin.}\, z}\right) = L\left(\frac{1 + \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{1 - \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}\right).$$

Tum vero quia $\text{coſ.}\, u = \text{coſ.}\, 2z^2$ fit

$$\text{ſin.}\, u = \sqrt{(1 - \text{coſ.}\, 2z^4)} = \text{ſin.}\, 2z \sqrt{(1 + \text{coſ.}\, 2z^2)},$$

hinc $\text{ſin.}\, u = \frac{4x\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{(1 + \sqrt{(2x^2 - 1)})^2}$, ideoque

$$\frac{1+\sin.u}{1-\sin.u}=\frac{x^2+2x\sqrt[4]{(2x^2-1)}+\sqrt{(2x^2-1)}}{x^2-2x\sqrt[4]{(2x^2-1)}+\sqrt{(2x^2-1)}}=\frac{(x+\sqrt[4]{(2x^2-1)})^2}{(x-\sqrt[4]{(2x^2-1)})^2},$$

vnde

$$\tfrac{1}{2}\,L\left(\frac{1+\sin.u}{1-\sin.u}\right)=L\left(\frac{x+\sqrt[4]{(2x^2-1)}}{x-\sqrt[4]{(2x^2-1)}}\right).$$

Has igitur partes collectim ſumendo, habebitur integrale quaeſitum:

$$\text{arc. tang.}\sqrt[4]{(2x^2-1)}-\tfrac{1}{2}\,\text{arc. tang.}\frac{\sqrt[4]{(2x^2-1)}}{x}$$
$$+\tfrac{1}{2}\,L\left(\frac{1-\sqrt[4]{(2x^2-1)}}{1+\sqrt[4]{(2x^2-1)}}\right)-\tfrac{1}{4}\,L\left(\frac{x-\sqrt[4]{(2x-1)}}{x+\sqrt[4]{(2x-1)}}\right),$$

ſiue ſi ſimplicitatis gratia ponatur

$$\sqrt[4]{(2x^2-1)}=y \quad\text{et}\quad \frac{\sqrt[4]{(2x^2-1)}}{x}=v,$$

erit hoc integrale:

$$\text{arc. tang.}\,y-\tfrac{1}{2}\,\text{arc. tang.}\,v+\tfrac{1}{2}\,L\left(\frac{1-y}{1+y}\right)-\tfrac{1}{4}\,L\left(\frac{1-v}{1+v}\right).$$

§. 5. His perpenſis facilior nunc quidem patet via integrationem perficiendi, quae tamen mihi primo intuitu ſe non obtulerat. Scilicet ſi propoſitae formulae differentialis numerator et denominator ſimul multiplicentur per $1-x$, conſequimur

$$\frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}}=\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt[4]{(2x^2-1)}}-\frac{x\,dx}{(1-x^2)\sqrt[4]{(2x^2-1)}}.$$

Pro ſecundo membro ſi ſubſtitutio fiat $\sqrt[4]{(2x^2-1)}=y$, erit

$$x\,dx=y^3\,dy;\quad\text{et}\quad 1-x^2=\tfrac{1}{2}(1-y^4),$$

vnde colligitur

$$\frac{-x\,dx}{(1-x^2)\sqrt[4]{(2x^2-1)}}=-\frac{2y^2\,dy}{1-y^4}=\frac{dy}{1+y^2}-\frac{dy}{1-y^2}.$$

Hinc

Hincque integrando fit:

$$\int \frac{-x\,dx}{(1-x^2)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \int \frac{dy}{1+y^2} - \int \frac{dy}{1-y^2} = \text{arc. tang.}\, y + \tfrac{1}{2} L \left(\frac{1-y}{1+y}\right).$$

Pro priori autem membro ſtatuatur $\frac{\sqrt[4]{(2x^2-1)}}{x} = v$, ex quo fiet $\frac{2x^2-1}{x^4} = v^4$ et $\frac{(1-x^2)^2}{x^4} = 1 - v^4$, tum vero erit $\frac{(1-x^2)\,dx}{x^5} = v^3\,dv$, hincque

$$\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{v^2\,dv}{1-v^4} = -\tfrac{1}{2}\frac{dv}{1+v^2} + \tfrac{1}{2}\frac{dv}{1-v^2}.$$

Vnde integratione facta colligimus:

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = -\tfrac{1}{2}\int \frac{dv}{1+v^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dv}{1-v^2} = -\tfrac{1}{2}\,\text{arc. tang.}\, v - \tfrac{1}{4} L \left(\frac{1-v}{1+v}\right).$$

§. 6. Si in formula differentiali propoſita $\frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$ loco x ſcribatur $-x$, facile liquet formulam quoque $\frac{dx}{(1-x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$ ſimili ratione per Logarithmos et arcus circulares integrationem admittere. Quin immo vti formula $\frac{x\,dx}{(1-x^2)\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$ per huiusmodi quantitates fit integrabilis, ita quoque iſtius formulae $\frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$ per Logarithmos et arcus circulares integratio abſoluitur, adhibita enim ſubſtitutione $\sqrt[4]{(2x^2-1)} = y$, fit $2x^2 = 1 + y^4$, hinc

$$x\,dx = y^3\,dy \text{ et } 1 + x^2 = \tfrac{1}{2}(3 + y^4),$$

vnde colligitur $\frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{2y^2\,dy}{3+y^4}$, quae rationalis facta eſt ideoque per Logarithmos et arcus circulares integratur. Si pro hac formula vſus adhibeatur ſubſtitutionis $\text{tang.}\, z = \sqrt[4]{(2x^2-1)}$, fiet

$$1 + x^2 = \frac{4 \cos. z^4 + \cos. 2z^2 + 1}{4 \cos. z^4} = \frac{\cos. 2x^2 + \cos. 2z + 1}{2 \cos. z^4},$$ ob

$4 \cos. z^4 = (\cos. 2z + 1)^2$, hinc colligitur

$$\frac{x\,dx}{(1 + x^2)\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}} = \frac{2\,dz.\,\sin. z^2}{1 + \cos. 2z + \cos. 2z^2} = \frac{dz(1 - \cos. 2z)}{1 + \cos. 2z + \cos. 2z^2}$$

$$= \frac{dz(1 - \cos. 2z)^2}{1 - \cos. 2z^3},$$

quare omnino patet hanc formulam per Logarithmos et arcus circulares eſſe integrabilem, quod quidem primo intuitu non admodum obuium videbatur.

§. 7. Hinc occaſionem nunc quoque arripuimus integrandi formulas differentiales

$$\frac{x\,dx}{(1 + x^2)\sqrt[4]{(2x^2 + 1)}} \text{ et } \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt[4]{(2x^2 + 1)}}.$$

Pro priori ſtatuatur $y = \sqrt[4]{(2x^2 + 1)}$, vnde erit

$$\tfrac{1}{2}(y^4 - 1) = x^2,\ x\,dx = y^3\,dy \text{ et } 1 + x^2 = \tfrac{1}{2}(1 + y^4),$$

hinc igitur obtinemus $\frac{x\,dx}{(1 + x^2)\sqrt[4]{(2x^2 + 1)}} = \frac{2y^2\,dy}{1 + y^4}$. Pro poſteriori iſthac vtamur ſubſtitutione

$$v = \frac{\sqrt[4]{(2x^2 + 1)}}{x},$$ vnde fiet

$$1 + v^4 = \frac{(1 + x^2)^2}{x^4} \text{ et } -\frac{dx(1 + x^2)}{x^3} = v^3\,dv,$$

hincque erit

$$\frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt[4]{(2x^2 + 1)}} = -\frac{v^2\,dv}{1 + v^4}.$$

Pro integratione autem formulae $\frac{y^2\,dy}{1 + y^4}$, obſeruamus denominatorem $1 + y^4$ in binos iſtos factores reſolui:

$$1 + y\sqrt{2} + y^2;\ 1 - y\sqrt{2} + y^2,$$ vnde erit;

$$\frac{2y^2\,dy}{1+y^4} = \frac{y\,dy}{\sqrt{2}(1-y\sqrt{2}+y^2)} - \frac{y\,dy}{\sqrt{2}(1+y\sqrt{2}+y^2)} = \frac{(2y-\sqrt{2})\,dy}{2\sqrt{2}(1-y\sqrt{2}+y^2)}$$
$$+ \frac{dy}{2(1-y\sqrt{2}+y^2)} - \frac{(2y+\sqrt{2})\,dy}{2\sqrt{2}(1+y\sqrt{2}+y^2)} + \frac{dy}{2(1+y\sqrt{2}+y^2)}.$$

Atqui eſt:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dy(2y-\sqrt{2})}{1-y\sqrt{2}+y^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dy(2y+\sqrt{2})}{1+y\sqrt{2}+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{L}\left(\frac{1-y\sqrt{2}+y^2}{1+y\sqrt{2}+y^2}\right),$$

tum vero eſt

$$\frac{1}{2}\int\frac{dy}{1-y\sqrt{2}+y^2} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\,\text{Arc. tang.}\,(1-y\sqrt{2})\ \text{et}$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{dy}{1+y\sqrt{2}+y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{Arc. tang.}\,(1+y\sqrt{2}),$$

igitur collectim ſumendo

$$\frac{1}{2}\int\frac{dy}{(1-y\sqrt{2}+y^2)} + \int\frac{dy}{1+y\sqrt{2}+y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc. tang.}\left(\frac{y\sqrt{2}}{1-y^2}\right).$$

Eademque ratione inuenitur:

$$\int\frac{v^2\,dv}{1+v^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{arc. tang.}\left(\frac{v\sqrt{2}}{1-v^2}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{L}\left(\frac{1-v\sqrt{2}+v^2}{1+v\sqrt{2}+v^2}\right).$$

§. 8. Si loco $\sqrt[4]{(2x^2+1)}$ ſubſtituatur $\cot. z$, fiet $2x^2+1 = \cot. z^4$; $2x^2 = \cot. z^4 - 1$, hinc

$$x^2 = \frac{\cos. z^2 - \sin. z^2}{4\sin. z^4} = \frac{\cos. 2z}{2\sin. z^4};\quad x\,dx = -\frac{dz\cot. z^3}{\sin. z^2};$$
$$1 + x^2 = \frac{\cot. z^4 + 1}{2} = \frac{\cos. z^4 + \sin. z^4}{2\sin. z^4},$$

hinc prodit

$$\frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt[4]{(2x^2+1)}} = \frac{-2dz\cos. z^2}{\cos. z^4+\sin. z^4} = \frac{-2dz\cos. z^2}{1-2\sin. z^2\cos. z^2},\ \text{ob}$$
$$\cos. z^4 + 2\sin. z^2\cos. z^2 + \sin. z^4 = 1,$$

tum vero denuo habebitur:

$$\frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt[4]{(2x^2+1)}} = \frac{-2dz\cos. z^2}{1-2\sin. z^2\cos. z^2} = \frac{-4dz\cos. z^2}{2-\sin. 2z^2} = \frac{-2dz(1+\cos. 2z)}{1+\cos. 2z^2},$$

adeo vt haec quoque formula per Logarithmos & arcus circulares ſit integrabilis. At ſi pro formula propoſita vtamur ſubſtitutione:

tang.

$$\text{tang.}\, u = \frac{\sqrt{2}.\sqrt[4]{(2x^2+1)}}{(1-\sqrt{(2x^2+1)})}, \text{ fiet}$$

$$1 + \text{tang.}\, u^2 = \frac{2(1+x^2)}{(1-\sqrt{(2x^2+1)})^2}, \text{ tumque}$$

$$\text{ſin.}\, u^2 = \frac{\text{tang.}\, u^2}{1+\text{tang.}\, u^2} = \frac{\sqrt{(2x^2+1)}}{1+x^2},$$

ex quo omnino colligitur

$$1 - \text{ſin.}\, u^4 = \frac{x^4}{(1+x^2)^2}, \text{ hincque}$$

$$\text{coſ.}\, u \sqrt{(1+\text{ſin.}\, u^2)} = \frac{x^2}{1+x^2}, \text{ nec non}$$

$$1 + x^2 = \frac{1}{1-\text{coſ.}\, u \sqrt{(1+\text{ſin.}\, u^2)}}.$$

Deinde hinc concluditur

$$\sqrt{(2x^2-1)} = \text{ſin.}\, u^2 (1+x^2) = \frac{\text{ſin.}\, u^2}{1-\text{coſ.}\, u \sqrt{(1+\text{ſin.}\, u^2)}}$$

atque

$$1 - \sqrt{(2x^2+1)} = \text{coſ.}\, u \frac{(\text{coſ.}\, u - \sqrt{(1+\text{ſin.}\, u^2)})}{1-\text{coſ.}\, u \sqrt{(1+\text{ſin.}\, u^2)}},$$

vnde denique fit

$$\sqrt[4]{(2x^2+1)} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, \text{tang.}\, u (1-\sqrt{(2x^2-1)})$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, \text{ſin.}\, u \frac{(\text{coſ.}\, u - \sqrt{(1+\text{ſin.}\, u^2)})}{1-\text{coſ.}\, u \sqrt{(1+\text{ſin.}\, u^2)}} \text{ et}$$

$$\frac{\sqrt[4]{(2x^2+1)}}{1+x^2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, \text{ſin.}\, u (\text{coſ.}\, u - \sqrt{(1+\text{ſin.}\, u^2)}).$$

In aequatione autem

$$\text{coſ.}\, u \sqrt{(1+\text{ſin.}\, u^2)} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

ſumtis differentialibus conſequimur:

$$-\frac{du\, \text{ſin.}\, u^3}{\sqrt{(1+\text{ſin.}\, u^2)}} = \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2},$$

et ſi haec aequatio multiplicetur per $\frac{1+x^2}{\sqrt[4]{(2x^2+1)}}$, prodibit omnino

$$-\frac{du\, \text{ſin.}\, u^2 \sqrt{2}}{\sqrt{(1+\text{ſin.}\, u^2)}\, (\text{coſ.}\, u - \sqrt{(1+\text{ſin.}\, u^2)})} = \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt[4]{(2x^2+1)}}.$$

Tum

Tum vero ſi fractionis

$$-\frac{du\,\text{ſin.}\,u^2\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\text{ſin.}\,u^2)}(\text{coſ.}\,u-\sqrt{(1+\text{ſin.}\,u^2)})}$$

numerator et denominator ſimul ducatur in

$$\text{coſ.}\,u+\sqrt{(1+\text{ſin.}\,u^2)},$$

ea transformabitur in iſthanc:

$$-\frac{du\,\text{ſin.}\,u^2\sqrt{2}(\text{coſ.}\,u+\sqrt{(1+\text{ſin.}\,u^2)})}{\sqrt{(1+\text{ſin.}\,u^2)}(\text{coſ.}\,u^2-1-\text{ſin.}\,u^2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{du(\text{coſ.}\,u+\sqrt{(1+\text{ſin.}\,u^2)})}{\sqrt{(1+\text{ſin.}\,u^2)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\,du+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{du\,\text{coſ.}\,u}{\sqrt{(1+\text{ſin.}\,u^2)}},$$

vbi de poſteriori termino patet illum per Logarithmos integrari; nam poſito $\text{ſin.}\,u=z$ fit $du\,\text{coſ.}\,u=dz$ hincque $\frac{du\,\text{coſ.}\,u}{\sqrt{(1+\text{ſin.}\,u^2)}}=\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)}}$.

§. 9. Contemplemur nunc formulas iſtas generaliter expreſſas

$$\frac{x\,dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt[4]{(2\gamma x^2+\delta)}}\text{ et }\frac{dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt[4]{(2\gamma x^2+\delta)}}.$$

De priori quidem liquet eam per ſubſtitutionem

$$u=\sqrt[4]{(2\gamma x^2+\delta)}$$

ſemper rationalem reddi, adeoque per Logarithmos et arcus circulares eſſe integrabilem, quicunque demum fuerint valores ipſorum α, β, γ, δ. Erit enim

$$u^4=2\gamma x^2+\delta;\quad u^3\,du=\gamma x\,dx;$$

et quia $x^2=\frac{u^4-\delta}{2\gamma}$, erit

$$\alpha+\beta x^2=u+\frac{\beta}{2\gamma}(u^4-\delta)=\frac{1}{2\gamma}(2\alpha\gamma-\beta\delta+\beta u^4),$$

vnde fiet

$$\frac{x\,dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt[4]{(2\gamma x^2+\delta)}}=\frac{2u^2\,du}{2\alpha\gamma-\beta\delta+\beta u^4}.$$

At pro formula $\frac{dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt[4]{(2\gamma x^2+\delta)}}$ ſi vſus fiat ſubſtitutionis $v=\sqrt[4]{\frac{(2\gamma x^2+\delta)}{x^4}}$, erit $v^4=\frac{2\gamma x^2+\delta}{x^4}$ et $v^3\,dv=-\frac{(\gamma x^2+\delta)\,dx}{x^5}$. Nunc igitur fiet

$$\alpha v^4=\frac{2\alpha\gamma x^2+\alpha\delta}{x^4} \text{ hincque}$$

$$\beta\gamma+\alpha v^4=\frac{\beta\gamma x^4+2\alpha\gamma x^2+\alpha\delta}{x^4},$$

vbi quidem ſi $\alpha\gamma=\beta\delta$, iſta expreſſio

$$\beta\gamma x^4+2\alpha\gamma x^2+\alpha\delta=\beta\gamma x^4+(\beta\delta+\alpha\gamma)x^2+\alpha\delta,$$

in binos factores $(\alpha+\beta x^2)(\delta+\gamma x^2)$ eſt reſolubilis, quare pro eo caſu erit:

$$+\frac{dx}{(\alpha+\beta x^2)}=-\frac{x^5 v^3\,dv}{(\alpha+\beta x^2)(\delta+\gamma x^2)}=-\frac{v^3 x\,dv}{\beta\gamma+\alpha v^4},$$

hincque

$$\frac{dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt[4]{(2\gamma x^2+\delta)}}=-\frac{v^2\,dv}{\beta\gamma+\alpha v^4} \text{ ob } v=\frac{\sqrt[4]{(2\gamma x^2+\delta)}}{x}.$$

Heic igitur iſta praeſcribitur conditio, vt ſit $\alpha\gamma=\beta\delta$, vt formula $\frac{dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt[4]{(2\gamma x^2+\delta)}}$ per Logarithmos et arcus circulares ſit integrabilis, quatenus ſaltem vſus adhibeatur ſubſtitutionis $v=\frac{\sqrt[4]{(2\gamma x^2+\delta)}}{x}$.

§. 10. Si propoſita fuerit formula differentialis

$$\frac{(1-x^{m-1})\,dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{(2x^m-1)}},$$

illa quidem per methodum conſimilem illi, qua in §. 5. vſi ſumus, integrari poterit. Nam ſi haec formula in iſtas diſtribuatur partes:

dx

$$\frac{dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{(2x^m-1)}} \text{ et } \frac{-x^{m-1}dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{(2x^m-1)}},$$

pro prima ſtatuatur $v = \frac{\sqrt[2m]{(2x^m-1)}}{x}$, vnde colligitur

$$1 - v^{2m} = \frac{(1-x^m)^2}{x^{2m}}$$

et differentialibus ſumtis prodit

$$v^{2m-1}dv = \frac{dx(1-x^m)}{x^{2m+1}},$$

hincque

$$\frac{v^{2m-1}dv}{1-v^{2m}} = \frac{dx}{x(1-x^m)} \text{ et}$$

$$\frac{v^{2m-2}dv}{1-v^{2m}} = \frac{dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{(2x^m-1)}},$$

ex quo patet $\frac{dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{(2x^m-1)}}$ per Logarithmos et arcus circulares eſſe integrabilem. Pro ſecunda forma ponatur $y = \sqrt[2m]{(2x^m-1)}$, ſicque fiet $\frac{1}{2}(1-y^{2m}) = 1-x^m$, hinc ſumtis differentialibus

$$y^{2m-1}dy = x^{m-1}dx, \text{ vnde}$$

$$\frac{y^{2m-1}dy}{2(1-y^{2m})} = \frac{x^{m-1}dx}{1-x^m} \text{ et}$$

$$\frac{y^{2m-2}\,dy}{2(1-y^{2m})} = \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{(2x^m-1)}}.$$

§. 11. Si in formula differentiali $\frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$ ponatur $x = \text{coſ.}\,2u$, erit

$$2x^2 - 1 = 2\,\text{coſ.}\,2u^2 - 1 = \text{coſ.}\,4u;$$

$$dx = -2du\,\text{ſin.}\,2u \text{ et } 1 + x = 1 + \text{coſ.}\,2u = 2\,\text{coſ.}\,u^2,$$

hincque

$$\frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = -\frac{du.\,\text{ſin.}\,2u}{\text{coſ.}\,u^2\sqrt[4]{\text{coſ.}\,4u}} = -\frac{2du\,\text{tang.}\,u}{\sqrt[4]{\text{coſ.}\,4u}},$$

ita nunc quoque euidens ſit formulam $\frac{du\,\text{tang.}\,u}{\sqrt[4]{\text{coſ.}\,4u}}$ per Logarithmos et arcus circulares eſſe integrabilem. Hinc quidem ſuſpicio ſuboriri poterit, etiam alias huius indolis formulas, vtpote $\frac{du\,\text{ſin.}\,u}{\text{coſ.}\,u^2}$; $\frac{du\,\text{tang.}\,u}{\sqrt{\text{coſ.}\,2u}}$; $\frac{du\,\text{tang.}\,u}{\sqrt[3]{\text{coſ.}\,3u}}$; vel algebraice integrari poſſe, vel per Logarithmos et arcus circulares eſſe integrabiles. De prima quidem conſtat eſſe eius integrale algebraicum $\frac{1}{\text{coſ.}\,u}$. At pro ſecunda ponatur $\text{coſ.}\,u = v$ eritque $-du\,\text{ſin.}\,u = dv$;

$$\sqrt{\text{coſ.}\,2u} = \sqrt{(2\,\text{coſ.}\,u^2 - 1)} = \sqrt{(2v^2 - 1)},$$

hincque

$$\frac{du\,\text{tang.}\,u}{\sqrt{\text{coſ.}\,2u}} = -\frac{dv}{v\sqrt{(2v^2-1)}}.$$

Iam ponatur $\sqrt{(2v^2-1)} = \text{tang.}\,z$, ita vt ſit

$$2v^2 = 1 + \text{tang.}\,z^2 = \frac{1}{\text{coſ.}\,z^2}, \text{ hinc}$$

$v =$

$$v = \frac{1}{\text{coſ.}\, z \sqrt{2}} \text{ ; et } \frac{dv}{v\sqrt{(2v^2-1)}} = dz,$$

cuius integrale igitur arcu circuli z exprimitur. Eſt vero

$$\text{coſ.}\, u = v = \frac{1}{\text{coſ.}\, z \sqrt{2}}, \text{ hincque erit}$$

$$-\int \frac{du\, \text{tang.}\, u}{\sqrt{\text{coſ.}\, 2u}} = \text{arc. coſ}\, \frac{1}{\text{coſ.}\, u \sqrt{2}}.$$

Pro formula autem $\frac{du\, \text{tang}\, u}{\sqrt[3]{\text{coſ.}\, 3u}}$, obſeruare licet, eam poſito coſ. $u = v$, in hanc abire $-\frac{dv}{v\sqrt[3]{(4v^3-3v)}}$, quae ſi ſimul multiplicetur et diuidatur per $\sqrt[3]{2}$, tumque loco $2v$ ſubſtituatur $\frac{1}{z}$, vnde $-\frac{dv}{v} = \frac{dz}{z}$, in hanc ſimpliciorem mutatur formulam $\frac{dz\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{(1-3z^2)}}$. Tum vero poſito $\sqrt[3]{(1-3z^2)} = x$, fit $1 - x^3 = 3z^2$, hinc $2z\,dz = -x^2\,dx$ et $dz = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$, nec non

$$\frac{dz}{\sqrt[3]{(1-3z^2)}} = -\sqrt{\tfrac{3}{4}} \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}},$$

cuius formulae integratio non niſi per rectificationes ſectionum conicarum perfici poteſt. Hinc vero facile intelligitur formulas differentiales huius generis altiorum ordinum, vti $\frac{du\, \text{tang.}\, u}{\sqrt[5]{\text{coſ.}\, 5u}}$ vel $\frac{du\, \text{tang.}\, u}{\sqrt[6]{\text{coſ.}\, 6u}}$, nequaquam per Logarithmos et arcus circulares fore integrabiles.

TENTAMEN DEMONSTRATIONIS QVOD OMNIS QVANTITAS IMAGINARIA AD FORMAM $A + B\sqrt{-1}$ REDVCI POSSIT.

Auctore
NICOLAO FUSS.

§. 1.

Veritatibus illis analyticis, iam extra omne dubium poſitis, licet nulla ſuffultis demonſtratione ſtricte ſic dicta, iure meritoque annumerari ſolet nota illa quantitatum imaginariarum proprietas, qua omnes, cuiuscunque ſint ordinis, generis, formae, ſemper ad formam $A + B\sqrt{-1}$ reductionem admittunt, denotantibus A et B quantitates quascunque vel rationales, vel irrationales, immo etiam tranſcendentes. Huic proprietati cum non ſolum reſolutio omnium aequationum algebraicarum, ſed etiam plures aliae operationes analyticae innitantur, maxime optandum foret, vt eius veritas, etiamſi iam ſatis evicta videatur, ſolida demonſtratione, eaque directa, muniretur.

§. 2.

§. 2. Huic maximi momenti negotio plures inſignes Geometrae operam ſuam dedere, inter quos viros ſummos et nunquam non moriturae memoriae, *Eulerum* et *d'Alembert*, nominaſſe ſufficiet. Neuter autem, vt ipſi fatebantur, iſtud arduum negotium confecit. Alter id tantum intendit, vt idoneorum exemplorum ſerie oſtenderet, plurima imaginariorum genera ad formam $A + B\sqrt{-1}$ reuera reduci poſſe. Alter vero demonſtrationem ſuam non ex ipſa imaginariorum natura, vnde petenda foret, ſed ex conſideratione, ab ipſa prorſus aliena, infinite paruorum deduxit; eiusque ratiocinia non ad omnis generis quantitates tranſcendentes extendi poſſe videntur.

§. 3. His tantorum virorum tentaminibus quae ipſe ſuper hoc argumento meditatus ſum addere vix auſus eſſem, niſi leuiuſculae coniecturae, quas hic in medium afferre conſtitui, aliquando cum ſucceſſu in vſum vocari poſſe viderentur; quamobrem Geometris non ingratum fore arbitror, ſi meas meditationes, quibus autem ipſe vix nomen tentaminis tribuere conor, hic breuiter & dilucide expoſuero.

§. 4. Denotet igitur z quantitatem imaginariam quamcunque, litterae vero a, b, c, ſint quantitates reales, vel rationales vel irrationales, vel adeo tranſcendentes. Hic primo in tranſitu obſeruare conuenit, formulam $a + z$ quoque eſſe imaginariam, et quidem diuerſam ab ipſo imaginario z, quoniam illud ſuperat quantitate reali a. Ex quo ſtatim intelligitur, imaginariis nomen quantitatis denegari non poſſe, vt pluribus eſt viſum. Cum enim

quan-

quantitas vocari ſoleat omne id quod vel augeri vel diminui poteſt, nihilque impediat, quominus ad imaginarium z quantitas realis a addatur, etiam hoc ipſum z merito ad quantitates referimus. Tantum coacti ſumus duo genera quantitatum conſtituere: alterum ſcilicet realium, alterum imaginariarum.

§. 5. His in tranſitu obſeruatis, euidens eſt formulam $a + z$, etiamſi infinitas complectatur quantitates imaginarias, tam inter ſe quam ab aſſumta z diuerſas, (vtique enim diuerſitas inter imaginarias quantitates ſtatui debet, quoniam earum differentias aſſignare valemus) tamen non omnes plane quantitates imaginarias complecti. Formula enim bz etiam infinitas tales quantitates in ſe complectitur, quarum tamen ne vnica quidem in priore genere continetur: ſi enim vnico tantum caſu eſſet $a + z = bz$, foret $z = \frac{a}{b-1}$, ideoque quantitas realis, contra hypotheſin.

§. 6. Quoniam igitur vtraque formula $a + z$ et bz infinita continet imaginaria inter ſe diverſa, formula $a + bz$, quae vtramque complectitur, infinities adhuc plures quam alterutra praecedentium inuoluat neceſſe eſt. Maxime igitur probabile videtur, hanc formam: $b + az$, omnes plane quantitates imaginarias, quae quidem in calculo vnquam occurrere poſſunt, in ſe complecti; quod ſi demonſtrari poſſet, haberetur ſimul perfecta demonſtratio Theorematis propoſiti. Cum enim z quodcunque imaginarium deſignet, illa forma $a + bz$ cum propoſita $A + B\sqrt{-1}$ perfecte conuenire cenſenda eſt.

§. 7.

§. 7. Maiori autem adhuc firmamento veritati Theorematis propoſiti erit conſideratio, quod etiam haec formula: $\frac{c}{z}$, infinitas quantitates imaginarias contineat. Quia enim tum vtraque formula $a \pm b z$ et $\frac{c}{z}$ infinitas complectitur quantitates imaginarias, tuto aſſumi poſſe videtur, has formas ſemper quandam communem quantitatem imaginariam in ſe complecti, hoc eſt, ſemper dari eiusmodi quantitates reales a, b, c, vt vel vnico caſu fiat $a \pm b z = \frac{c}{z}$.

§. 8. Hoc principio conceſſo in gratiam concinnitatis obſeruo, ſine detrimento vniuerſalitatis ambiguitatem ſigni omitti poſſe, cum ipſa quantitas realis b iam poſitiua vel negatiua eſſe queat; noſtram igitur aequationem ita repraeſentemus: $\frac{a}{b} - z = \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{z}$, vel ita: $\alpha - z = \frac{\beta}{z}$, denotantibus α et β quantitates reales quascunque. Ex hac autem aequatione deducitur pro imaginario aſſumto z valor $z = \frac{1}{2}\alpha \pm \surd(\frac{1}{4}\alpha\alpha - \beta)$. Quare cum per hypotheſin debeat eſſe z imaginarium, euidens eſt, quantitatem $\frac{1}{4}\alpha\alpha - \beta$ poſitiuam eſſe non poſſe. Statuatur ergo $\frac{1}{4}\alpha\alpha - \beta = -\gamma\gamma$, eritque $z = \frac{1}{2}\alpha \pm \gamma \surd - 1$; conſequenter omnes quantitates imaginariae (per z enim omnes plane huiusmodi quantitates deſignari ſumebantur) ad formam eandem $A + B \surd - 1$ reduci poſſunt.

§. 9. Quo iis, quibus principium hic aſſumtum adhuc nimis dubium videtur, quodammodo ſatisfaciam, eius veritatem aliquot exemplis corroborabo, eiusmodi formulas imaginarias ſpectantibus, quas quondam inſignes quidam Geometrae negarunt ad formam $A + B \surd - 1$ reduci

duci poſſe. Huc pertinent quantitates $\sqrt[4]{-1}$ et $l-1$, quas adeo negarunt eſſe imaginarias, priorem *Nicolaus*, poſteriorem *Joannes Bernoullii*, cum tamen vtraque ad formam propoſitam reduci queat, id quod ſequenti modo ope principii hic aſſumti oſtendo.

§. 10. Sit igitur $z = \sqrt[4]{-1}$, et poſito, vt fecimus, $\alpha - \sqrt[4]{-1} = \frac{\beta}{\sqrt[4]{-1}}$, erit

$$\alpha \sqrt[4]{-1} - \sqrt{-1} = \beta, \text{ ſiue}$$

$$\alpha \sqrt[4]{-1} = \beta + \sqrt{-1},$$

hincque

$$(\alpha\alpha - 2\beta)\sqrt{-1} = \beta\beta - 1,$$

cui aequationi reuera ſatisfit, ponendo

$$\alpha\alpha - 2\beta = 0 \text{ et } \beta\beta - 1 = 0,$$

vnde fit

$$\beta = 1 \text{ et } \alpha = \sqrt{2}, \text{ hincque } \gamma = \tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

quibus valoribus ſubſtitutis reperitur

$$z = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}.$$

Reuera autem eſt

$$\sqrt[4]{-1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1},$$

ideoque ad formam $A + B\sqrt{-1}$ reducitur.

§. 11. Sit $z = l-1$, eritque $l-1 = \frac{1}{2}a \pm \gamma\sqrt{-1}$ et nunc videamus an dentur valores reales pro α, β, γ, tales,

tales, vt haec expreſſio locum habeat. Supponimus quidem hic logarithmum vnitatis negatiuae imaginarium; haec autem ſuppoſitio neminem turbet: Si enim $l-1$ non eſſet imaginarius, fieri deberet $\gamma = 0$, quod autem non euenire mox videbimus. Cum igitur ſit $l-1 = \frac{1}{2}\alpha \pm \gamma\sqrt{-1}$, introducendo numerum c, cuius logarithmus hyperbolicus vnitate aequalis eſt, habebimus:

$$-1 = e^{\frac{1}{2}\alpha \pm \gamma\sqrt{-1}} = e^{\frac{1}{2}\alpha} . e^{\pm\gamma\sqrt{-1}}.$$

Conſtat autem eſſe

$$e^{\pm\gamma\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\,\gamma \pm \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\gamma,$$

vnde prodit

$$-1 = e^{\frac{1}{2}\alpha}(\text{coſ.}\,\gamma \pm \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\gamma).$$

Iam vero euidens eſt partem imaginariam euaneſcere debere, quod fit ſumendo $\gamma = \lambda\pi$, denotante π angulum 180 graduum et λ numerum integrum quemcunque. Tum autem erit

$$-1 = \pm e^{\frac{1}{2}\alpha}, \text{ ob coſ.}\,\gamma = \text{coſ.}\,\lambda\pi = \pm 1.$$

Quoniam autem quantitas $e^{\frac{1}{2}\alpha}$ negatiua fieri nequit, manifeſtum eſt numerum λ eſſe debere imparem. Sit igitur $\lambda = 2i+1$, eritque $\text{coſ.}\,\gamma = -1$, conſequenter

$$-1 = -e^{\frac{1}{2}\alpha}, \text{ ſiue } e^{\frac{1}{2}\alpha} = 1,$$

vnde concluditur $\alpha = 0$ et $\gamma = (2i+1)\pi$, quibus ſubſtitutis erit $z = l-1 = (2i+1)\pi\sqrt{-1}$. Hoc igitur modo non ſolum conuincimur, quod quantitas $l-1$ ſit imaginaria, innumerabiles valores diuerſos inuoluens, quemadmodum ſummus *Eulerus* olim primus oſtendit; ſed etiam

 cer-

certi ſumus eam noſtri principii ſubſidio ad formam $A+B\sqrt{-1}$ reduci poſſe.

§. 12. His duobus exemplis haud parum curioſis probe perpenſis, vix quisquam amplius dubitabit, quin principium noſtrum veritati ſit conſentaneum; et, quaecunque quantitas imaginaria pro z accipiatur, pro α, β, γ, ſemper eiusmodi dentur valores reales, vt fiat

$$\alpha - z = \frac{\beta}{z}, \text{ ſiue } z = \tfrac{1}{2}\alpha \pm \gamma\sqrt{-1}.$$

Sicque demonſtratio, quam hic exponere conati ſumus, non omnino contemnenda videtur.

§. 13. Coronidis loco binis caſibus modo expeditis tertium ſubiungamus non minus notatu dignum, quo ſcilicet z denotat arcum circularem, cuius ſinus duplo radii eſt aequalis, ita vt ſit $z = \text{Arc. ſin. } 2$. Manifeſtum autem eſt hoc caſu quantitates reales α, β, γ, aliam poſtulare Analyſin, vnde rem generalius expedire conuenit. Ponatur igitur $z = \text{A ſin. } s$, exiſtente s numero vnitate maiore, et videatur quomodo litterae α et β accipi debeant, vt poſitioni $\alpha - z = \frac{\beta}{z}$ ſatisfiat. Hunc in finem notetur eſſe

$$\text{A ſin. } s = \int \frac{ds}{\sqrt{(1-ss)}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int \frac{ds}{\sqrt{(ss-1)}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\left(s+\sqrt{(ss-1)}\right) + C$$

vbi, quia ſumto $s = 1$ prodire debet $\text{A ſin. } s = \frac{\pi}{2}$, euidens eſt eſſe debere conſtantem $C = \frac{\pi}{2}$, ita vt

$$z = \text{A ſin. } s = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\left(s+\sqrt{(ss-1)}\right).$$

Cum igitur ex aequatione $\alpha - z = \frac{\beta}{z}$ fiat $z = \frac{1}{2}\alpha \pm \gamma\sqrt{-1}$, erit

$\alpha =$

$$\alpha = \pi \text{ et } \gamma = l(2 + \sqrt{3}),$$

hoc eſt

$$\alpha = 3,1415926 \text{ et } \gamma = 1,3169579.$$

Sicque etiam hoc caſu valores reales ſatisfacientes pro α et γ exhibere licuit, vnde noſtrum principium eo magis confirmatur.

Additamentum.

De gemina methodo expreſſionem $l(s+\sqrt{(ss-1)})$ in ſeriem conuertendi.

§. 14. Caſus poſtremo loco expeditus perduxit nos ad logarithmum quantitatis irrationalis $s+\sqrt{(ss-1)}$, cuiusmodi expreſſiones cum frequentiſſime in Analyſi occurrere ſoleant, licet ad inſtitutum noſtrum proprie non pertinet, non penitus tamen abs re fore arbitror, ſi methodos quasdam expoſuero, hanc expreſſionem $l(s+\sqrt{(ss-1)})$ in ſeriem conuergentem commode conuertendi, eo minus quod hae methodi vulgari iterum ad logarithmum conducentis, praeſtantiores ſint et artificiis analyticis non admodum vſitatis innitantur.

Methodus prior.

§. 15. Primum obſeruo eſſe formulam

$$s+\sqrt{(ss-1)} = \left(\sqrt{\tfrac{s+1}{2}} + \sqrt{\tfrac{s-1}{2}}\right)^2,$$

tum vero

$$\sqrt{\tfrac{s+1}{2}} + \sqrt{\tfrac{s-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\tfrac{s+1}{2}} + \sqrt{\tfrac{s-1}{3}}},$$

 con-

conſequenter

$$s+\sqrt{(ss-1)}=\frac{\sqrt{\frac{s+1}{2}}+\sqrt{\frac{s-1}{2}}}{\sqrt{\frac{s+1}{2}}-\sqrt{\frac{s-1}{2}}}=\frac{1+\sqrt{\frac{s-1}{s+1}}}{1-\sqrt{\frac{s-1}{s+1}}},\text{ ideoque}$$

$$l(s+\sqrt{(ss-1)})=l\frac{1+\sqrt{\frac{s-1}{s+1}}}{1-\sqrt{\frac{s-1}{s+1}}}.$$

Conſtat autem eſſe

$$l\frac{1+x}{1-x}=2x(1+\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{5}x^4+\tfrac{1}{7}x^6+\text{ etc.}).$$

Erit igitur

$$l(s+\sqrt{(ss-1)})=2\sqrt{\frac{s-1}{s+1}}\left(1+\tfrac{1}{3}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)+\tfrac{1}{5}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2+\tfrac{1}{7}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^3+\text{ etc.}\right)$$

Methodus altera.

§. 16. Haec methodus, praecedente aliquanto prolixior, attentionem quandam meretur, ob Analyſin prorſus ſingularem, cuius pauca tantum ſpecimina ab Ill. quondam *Eulero* exhibita ſunt. Cum ſit

$$l(s+\sqrt{(ss-1)})=\int\frac{ds}{\sqrt{(ss-1)}},$$

ponatur $s=1+2xx$, vt ſit $x=\sqrt{\frac{s-1}{2}}$, fietque

$$\int\frac{ds}{\sqrt{(ss-1)}}=2\int\frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}.$$

Huius iam formulae quaeratur integrale ab $x=0$ ad $x=c$ extenſum, quem in finem ea ita repraeſentetur:

$$2\int\frac{dx}{\sqrt{((1+cc)-(cc-xx))}}=\frac{2}{\sqrt{(1+cc)}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{cc-xx}{1+cc}\right)}}.$$

Euoluatur irrationale $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{cc-xx}{1+cc}}}$ in ſeriem, quae erit

$$1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{cc-xx}{1+cc}\right)+\tfrac{1.3}{2.4}\left(\frac{cc-xx}{1+cc}\right)^2+\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{cc-xx}{1+cc}\right)^3+\text{ etc.}$$

hancque ſeriem ductam in dz integrari oportet a termino $x=0$ ad terminum $x=c$. Cum ergo ſit

$\int dx$

$$\int dx = c$$
$$\int dx\,(cc - xx)\ \tfrac{2}{3}c^3$$
$$\int dx\,(cc - xx)^2 = \tfrac{2.4}{3.5}c^5$$
$$\int dx\,(cc - xx)^3 = \tfrac{2.4.6}{3.5.7}c^7$$
etc.

his valoribus ſubſtitutis integrale quaeſitum erit

$$\frac{2c}{\sqrt{(1+cc)}}\left(1 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\left(\frac{cc}{1+cc}\right) + \tfrac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{2.4}{3.5}\left(\frac{cc}{1+cc}\right)^2 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{cc}{1+cc}\right)^3 + \text{etc.}\right)$$

quod reducitur ad hanc ſeriem ſimpliciorem:

$$\frac{2c}{\sqrt{(1+cc)}}\left(1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{cc}{1+cc}\right) + \tfrac{1}{5}\left(\frac{cc}{1+cc}\right)^2 + \tfrac{1}{7}\left(\frac{cc}{1+cc}\right)^3 + \text{etc.}\right)$$

Eſt vero $x = c = \sqrt{\frac{s-1}{2}}$, ideoque $\frac{cc}{1+cc} = \frac{s-1}{s+1}$, ergo

$$\int\frac{ds}{\sqrt{(ss-1)}} = 2\sqrt{\frac{s-1}{s+1}}\left(1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{s-1}{s+1}\right) + \tfrac{1}{5}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 + \tfrac{1}{7}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^3 + \text{etc.}\right)$$

quae ſeries eadem eſt quam ſupra iam pro $l(s+\sqrt{(ss-1)})$ inuenimus.

Applicatio ad caſum $s = 2$.

§. 17. Iſte caſus iam ſupra tractatus reſpectu ſummationis actualis ſeriei modo inuentae quandam attentionem meretur. Prodit enim

$$l(2+\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} + \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} + \text{etc.}\right)$$

quae ſeries tantum ratione ſignorum differt ab ea, cuius ope olim *Abramus Sharp* atque etiam *de Lagni* peripheriam circuli computauerunt, quaeque erat

$$\sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \text{etc.}\right)$$

Quod ſi igitur ex Tabulis *Sheruinianis*, vbi terminorum huius ſeriei alternorum ſumma ſeorſim eſt exhibita, excerpamus partem vtramque,

Par-

Partem ſcilicet poſitiuam = 3, 546233172282
et negatiuam: - - 0, 404640518592

Summa 3, 950873690774

dabit valorem ſeriei

$$\sqrt{12}\left(1+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.3^2}+\frac{1}{7.3^3}+\text{etc.}\right)$$

hincque per 3 diuidendo obtinebitur ſeries quaeſita

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.3^2}+\frac{1}{7.3^3}+\text{etc.}\right)=1,3169578969 25$$

quam ſummam adeo beneficio Analogiae obſeruatae ad centum et plures figuras decimales, ſi opus eſt, aſſignare licebit.

PHY-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE EFFECTV FRICTIONIS IN MOTV VOLVTORIO.

Auctore
L. EVLERO.

Quanquam hoc argumentum iam olim fuſius pertractaui, vbi motum globi ſuper plano ſiue voluentem, ſiue radentem, ſiue mixtum ex vtroque ſum contemplatus: tamen invtile non erit, hoc argumentum methodo planiori et faciliori denuo euoluere, quo clarius Phaenomena talium motuum perſpici queant. Inprimis autem hic etiam eiusmodi globos introducam, quorum centrum grauitatis extra centrum ſphaericitatis cadat. Antequam autem has inueſtigationes ſuscipiam, nonnulla de indole frictionis in genere praenotari conueniet.

Definitio.

§. 1. *Frictio* eſt vis, qua motui corporis ſuper alio incedentis ob attritum reſiſtitur, cuius indoles ad ſequentia capita reducitur:

I. Nullum eſt dubium, quin frictio potiſſimum pendeat a quantitate preſſionis, qua ambo corpora inuicem apprimuntur; et vulgo quidem frictio certae parti totius preſſionis aequalis aeſtimari ſolet.

II. Deinde etiam frictio ſine vllo dubio pendet ab aſperitate vel laeuitate vtriusque ſuperficiei, qua ambo corpora ſe mutuo tangunt; vbi quidem vulgaria experimenta probare videntur, neque quantitatem neque figuram baſis, qua corpora ſe mutuo contingunt, quicquam ad frictionem vel augendam vel minuendam conferre, vnde plerique auctores aſſumſerunt frictionem vulgo tertiae parti preſſionis aequalem aeſtimari poſſe, etſi non negant, ſi ſuperficies corporum magis minusue fuerint politae, etiam frictionem vel maiorem vel minorem inde oriri poſſe. Ita ſi P denotet vim, qua ambo corpora ſe mutuo premunt, frictio ſtatui ſolet $= \frac{1}{3} p$; vbi quidem intelligendum eſt, loco fractionis $\frac{1}{3}$ aliam vel maiorem vel minorem locum habere poſſe. Iſta autem vis eatenus tantum effectum exerit, quatenus reuera attritus adeſt: quamdiu enim ambo corpora quieſcunt, ob frictionem nulla plane vis exeritur; ſimulac vero attritus contingit, vis illa $\frac{1}{3} p$ totum ſuum effectum exercet ſecundum directionem motui contrariam.

III. Quando autem ſtatuimus in ſtatu quietis nullam adeſſe vim frictionis, hoc tantum locum habere cen-

ſen-

ſendum eſt quando nullae adſunt vires ad motum ſollicitantes. Quod ſi enim adfuerit vis quaepiam Q, alterum corpus ſuper altero promouere tendens, duo caſus ſunt perpendendi: alter quo haec vis $Q > \frac{1}{3}p$, alter vero quo $Q < \frac{1}{3}p$. Priore caſu frictio totam ſuam vim $\frac{1}{3}p$ exerit ſecundum directionem motui contrariam, ita vt motus tantum ab exceſſu vis Q ſuper $\frac{1}{3}p$ producatur: caſu altero quo $Q < \frac{1}{3}p$, frictio non totam ſuam vim exerit, ſed tantum agit vi $= Q$, quo huius vis effectus coerceatur.

IV. Hinc igitur vis frictionis in ſe neutiquam eſt determinata, ſed quouis caſu vi ſollicitanti ſecundum directionem contrariam reluctatur, et quidem vel tota ſua vi $\frac{1}{3}p$, vel minore, ſiquidem minor ſufficiat ad effectum vis Q cohibendum.

V. Vtrum vero quantitas frictionis non etiam a celeritate, qua vnum corpus ſuper altero prorepit, pendeat, quaeſtio eſt nondum penitus deciſa. Sunt enim qui putant, ob auctam celeritatem frictionem adeo diminui, neque deeſſe videntur experimenta huic opinioni fauentia; dum contra alii eiusmodi experimenta allegant, quibus frictio ob auctam celeritatem etiam augeri videatur, niſi forte reſiſtentiae aëris iſte effectus ſit tribuendus.

VI. Ceterum ob infinitam corporum varietatem, qua in contactu in ſe inuicem agere poſſunt, tum vero etiam ob diuerſam aſperitatis rationem vix quicquam in genere ſtabiliri poſſe videtur, vnde hoc loco opinionem communem circa frictionem ſum ſecuturus.

Problema I.

§. 2. *Definire motum globi ſuper plano inclinato, motu vtcunque ex radente et voluente mixto, deſcendentis, cuius quidem centrum grauitatis in ipſo centro figurae ſit ſitum.*

Solutio.

Tab. II. Fig. 6. Sit radius globi $CA = a$, eiusque pondus $= P$, centrum grauitatis vero in ipſius centro C. Tum vero ſit eius momentum inertiae reſpectu axis horizontalis per C tranſeuntis, circa quem gyratur, $= Pkk$, ita vt, ſi globus ex materia conſtet vniformi, ſit $kk = \frac{2}{5}aa$. Hic autem eius materiam vtcunque difformem aſſumamus, dummodo centrum grauitatis in punctum C incidat. Iam deſcendat iſte globus vtcunque ſuper plano inclinato IO, quod ad horizontem HO inclinetur angulo $IOH = \omega$, atque elapſo tempore t confecerit iam ſpatium $IS = s$, globo planum tangente in puncto S. Quia igitur globus ob grauitatem in directione verticali CP vrgetur vi $= P$, hinc naſcitur vis globum plano apprimens ſecundum directionem $CS = P \operatorname{coſ.} \omega$, atque inſuper vis ſecundum rectam CB plano IO parallelam motum accelerans $= P \operatorname{ſin.} \omega$. Globus igitur in planum IO preſſionem exercebit $= P \operatorname{coſ.} \omega$, vnde vis frictionis hinc nata erit $= \frac{1}{3} P \operatorname{coſ.} \omega$, ſiquidem detur attritus. At ſi minor vis ſufficiat ad attritum impediendum, etiam minorem exercebit, quae ergo ſit $\lambda P \operatorname{coſ.} \omega$. Praeterea vero globus motu gyratorio per tempus t angulum iam confecerit $ACS = \Phi$, ita vt celeritas angularis nunc ſit $\frac{d\Phi}{dt}$, qua punctum globi S ſecundum directionem SI ferretur celeritate $= \frac{a\,d\Phi}{dt}$, ſiquidem centrum C quieſceret, quod cum autem eodem tempore t iam

iam ſpatium IS $= s$ confeciſſe ponatur, eius celeritas ſecundum SO erit $\frac{ds}{dt}$. Ob hunc vtrumque motum igitur punctum globi S planum IO radet celeritate differentiae inter illas celeritates aequali, ſcilicet vel radet in directione SI celeritate $\frac{ad\Phi}{dt} - \frac{ds}{dt}$, ſiquidem fuerit $a\,d\Phi > d\,s$, vel radet in directione SO celeritate $\frac{ds}{dt} - \frac{ad\Phi}{dt}$, ſi fuerit $d\,s > a\,d\Phi$. Priore ergo caſu globus ob frictionem ſollicitabitur in directione SO vi $= \frac{1}{3}$ P coſ. ω, poſteriore vero caſu ſollicitabitur in directione SI pari vi $= \frac{1}{3}$ P coſ. ω. Verum ſi fuerit $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, nullus dabitur attritus, et globus in contactu S non maiorem exeret vim, quam quanta opus eſt ad attritum impediendum, quam ergo vim ſtatuamus $= \lambda$ P coſ. ω. Hinc igitur tres caſus occurrent evoluendi.

I. Ponamus igitur primo eſſe $\frac{ad\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, hocque caſu frictio exeret vim $= \frac{1}{3}$ P coſ. ω, ſecundum directionem SO, quare cum iam motu progreſſiuo globus ſollicitetur in directione CB plano inclinato parallela vi

$= \text{P ſin. } \omega + \frac{1}{3}\text{ P coſ. } \omega$,

principia motus nobis ſuppeditant hanc aequationem:

$$\frac{d\,d\,s}{2\,g\,d\,t^2} = \frac{\text{P ſin. } \omega + \frac{1}{3}\text{ P coſ. } \omega}{\text{P}} = \text{ſin. } \omega + \tfrac{1}{3}\text{ coſ. } \omega,$$

vbi littera g ſignificat altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo, ſiquidem tempus t in minutis ſecundis exprimere velimus. Pro motu autem gyratorio, quem in ſenſum SA fieri concipimus, ei ſe opponit vis frictionis $\frac{1}{3}$ P coſ. ω, momento $\frac{1}{3}a$ P coſ. ω, dum iſte motus ob ipſam grauitatem plane non afficitur, vnde principia mechanica hanc praebent aequationem:

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-\frac{1}{3}a\,P\,\text{coſ.}\,\omega}{Pkk} = \frac{-a\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk}.$$

Atque ex his duabus aequationibus motum globi definiri oportet, quamdiu ſcilicet fuerit $\frac{a\,d\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$.

Quoniam angulus ω eſt conſtans, prior aequatio ducta in $2g\,dt$ et integrata praebet

$$\frac{ds}{dt} = 2gt\,(\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) + f,$$

vbi cum $\frac{ds}{dt}$ exprimat celeritatem centri C ſecundum directionem I O progredientis, conſtans adiecta f exprimet iſtam celeritatem initialem, qua ſcilicet globus motum initio inchoauerit. Eodem modo altera aequatio in $2g\,dt$ ducta et integrata praebebit $\frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk}$, vbi quia $\frac{d\Phi}{dt}$ exprimit celeritatem angularem in ſenſum S A, elapſo tempore t conſtans hic adiecta ζ denotabit celeritatem angularem in eundem ſenſum, quae globo initio fuerit impreſſa. His igitur duabus aequationibus inuentis patet, iſtum motum tantum valere quamdiu fuerit $\frac{a\,d\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, hoc eſt quamdiu fuerit

$$a\zeta - \frac{2ga^2t\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk} > 2gt\,(\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) + f, \text{ ſiue}$$

$$a\zeta - f > 2gt\,(\frac{aa\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk} + \text{ſin.}\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega),$$

vnde intelligitur hunc motum locum habere non poſſe, niſi initio fuerit $a\zeta - f$ quantitas poſitiua, quae autem, quantumuis fuerit magna, tamen labente tempore t tandem indoles huius motus ceſſabit, quod ſcilicet eueniet quando formula

$$2gt\left(\frac{aa\,\text{coſ}.\,\omega}{3kk} + \text{ſin}.\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ}.\,\omega\right),$$

aequalis fiet quantitati $a\zeta - f$.

Quodſi has duas aequationes denuo in dt ducamus et integremus, reperiemus has aequationes:

$$s = C + ft + gtt\,(\text{ſin}.\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ}.\,\omega) \text{ et}$$
$$\Phi = \Gamma + \zeta t - \frac{gatt\,\text{coſ}.\,\omega}{3kk}.$$

II. Ponamus nunc tempore elapſo $= t''$ eſſe $\frac{ds}{dt} > \frac{a\,d\Phi}{dt}$, ita vt globus in puncto S radat planum ſecundum directionem S O, hincque frictio aget in directione S I vi $= \frac{1}{3}\,P\,\text{coſ}.\,\omega$, quae vis quia eſt contraria vi ex grauitate oriundae $P\,\text{ſin}.\,\omega$, qua motus progreſſiuus globi acceleratur, pro hoc motu progreſſiuo habebimus

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \text{ſin}.\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ}.\,\omega.$$

At pro motu gyratorio habebimus vim frictionis accelerantem, cuius momentum eſt $= \frac{1}{3}\,aP\,\text{coſ}.\,\omega$, vnde colligitur $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{a\,\text{coſ}.\,\omega}{3kk}$. Nunc igitur ex his duabus aequationibus integrando deducimus has aequalitates:

$$\frac{ds}{dt} = f + 2gt\,(\text{ſin}.\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ}.\,\omega) \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = \zeta + \frac{2gat\,\text{coſ}.\,\omega}{3kk},$$

quae autem eatenus tantum valere ſunt cenſendae, quatenus fuerit $\frac{ds}{dt} > \frac{a\,d\Phi}{dt}$, hoc eſt quatenus

$$f + 2gt\,(\text{ſin}.\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ}.\,\omega) > a\zeta + \frac{2gaat\,\text{coſ}.\,\omega}{3kk}, \text{ ſiue}$$
$$f - a\zeta > 2gt\left(\frac{aa\,\text{coſ}.\,\omega}{3kk} - \text{ſin}.\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ}.\,\omega\right).$$

Vnde intelligitur, vt talis motus eueniat initio eſſe debu-

iſſe $f > a\zeta$, poſtea vero continuatio huius motus praecipue pendebit ab hac formula:

$$\frac{aa\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk} + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega,$$

quae ſi fuerit poſitiua, iſte motus mox ceſſabit, ſin autem fuerit negatiua, motus perpetuo durabit, quod ergo continget ſi fuerit

$$\text{ſin.}\,\omega > \frac{aa\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk} + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega, \text{ ſiue}$$

$$\text{tang.}\,\omega > \frac{aa + kk}{3kk}.$$

Ceterum hac aequationes denuo integratae praebebunt

$$s = C + ft + gtt\,(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) \text{ et}$$

$$\Phi = \Gamma + \zeta t + \frac{gatt\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk}.$$

III. Sumamus tandem elapſo tempore t'' eſſe $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, ita vt iam nullus attritus locum habeat, Frictio igitur hoc caſu eatenus tantum aget, quatenus opus eſt ad attritum impediendum. Ponamus igitur iſtam frictionis vim eſſe $= \lambda P\,\text{coſ.}\,\omega$, ita vt $\lambda < \frac{1}{3}$, eique directionem tribuamus SO, atque pro motu progreſſiuo habebimus has duas aequationes, vti in caſu primo, dummodo loco $\frac{1}{3}$ ſcribatur λ.

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \text{ſin.}\,\omega + \lambda\,\text{coſ.}\,\omega,$$

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{\lambda a\,\text{coſ.}\,\omega}{kk},$$

quare cum per hypotheſin eſſe debeat $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, neceſſe eſt vt etiam ſit $\frac{dds}{dt^2} = \frac{a\,dd\Phi}{dt^2}$, haec ergo conditio praebet iſtam aequationem:

$$\text{ſin.}\,\omega + \lambda\,\text{coſ.}\,\omega = -\frac{\lambda aa\,\text{coſ.}\,\omega}{kk},$$

vnde colligitur

$$\lambda = \frac{-kk\,\text{ſin.}\,\omega}{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega} = \frac{-kk}{aa+kk}\,\text{tang.}\,\omega.$$

Dummodo ergo iſta fractio $\frac{kk}{aa+kk}$ tang. ω non ſuperet $\frac{1}{3}$, motus globi ſecundum hanc legem abſoluetur, & ſolo motu voluente ſuper plano deſcendet. Ad quem motum inveſtigandum ſtatuamus $\lambda = \frac{-kk}{aa+kk}$ tang. ω, et per integrationem reperiemus hos valores:

$$\frac{ds}{dt} = f + \frac{2gaat\,\text{ſin.}\,\omega}{aa+kk} \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = \zeta + \frac{2gat\,\text{ſin.}\,\omega}{aa+kk},$$

vbi autem per ipſam hypotheſin eſſe debet $f = a\zeta$; vnde patet, dummodo initio fuerit $f = a\zeta$ et fractio $\frac{kk}{aa+kk}$ tg. ω non ſuperet $\frac{1}{3}$, globum ſolo motu voluente ſuper plano inclinato deſcendere. Repetita autem integratio perducet ad hanc aequationem:

$$s = C + ft + gtt \cdot \frac{aa\,\text{ſin.}\,\omega}{aa+kk} \text{ et}$$
$$\Phi = \Gamma + \zeta t + gtt \cdot \frac{a\,\text{ſin.}\,\omega}{aa+kk}.$$

Ceterum vero ſi fuerit $\frac{kk}{aa+kk}$ tang. $\omega > \frac{1}{3}$, tum motus vti caſu ſecundo proſequetur. Hic quidem aſſumimus, plenam vim, quam frictio exercere valet, eſſe $= \frac{1}{3}p$ coſ. ω, etiamſi loco fractionis $\frac{1}{3}$ pro varia corporum indole modo maior modo minor fractio accipi debeat. Quod enim hic de $\frac{1}{3}$ dictum eſt, de alio quouis valore eſt intelligendum.

Scholion.

§. 3. In omni ergo motu, quo globus ſuper plano inclinato promouetur, hos tres caſus ſollicite a ſe inuicem diſtingui conuenit; vbi imprimis notetur, tertium caſum complecti prouolutionem globi perfectam, ita vt nullus attritus in contactu locum inueniat, cuius caracter in hoc

 con-

conſiſtit vt ſit $ds = ad\phi$. Caſum autem primum pro iis motibus conſtituimus, quibus motus gyratorius motum globi progreſſiuum ſuperat, ita vt ſit $ad\phi > ds$ et attritus ſuper plano retrorſum dirigatur. Secundus vero caſus eos continet motus, vbi celeritas progreſſiua ſuperat celeritatem angularem, ita vt ſit $ds > ad\phi$, et attritus antrorſum ſit directus. Quicunque ergo ſtatus globi initialis fuerit propoſitus, ante omnia diſpiciendum erit, ad quemnam horum caſuum referri debeat. Sumamus autem motus initium conſtitui in ipſo puncto I, ita vt poſito tempore $t = 0$ ſemper ſit etiam $s = 0$, vnde in ſuperioribus formulis conſtans illa C in nihilum abibit. Deinde vero, quia perinde eſt, a quonam termino angulus ϕ capiatur, pro initio conſtanter aſſumere poterimus $\Gamma = 0$. Praeterea vero in ſtatu initiali duplex motus, qui globo fuerit impreſſus, perpendi debet, quorum alter eſt progreſſiuus ſecundum ipſam plani directionem, cuius celeritatem indicauimus littera f, qua ſpatium definitur, quod ea celeritate in vno minuto ſecundo percurri poſſet. Denique vero motus angularis in initio deſignatur littera ζ, qua angulus denotatur, qui iſto motu angulari tempore vnius minuti ſecundi abſolueretur. Hic autem ſemper aſſumimus iſtum motum angularem in ſenſum SAB eſſe directum; vnde ſi in ſenſum contrarium vergeret, valor litterae ζ negatiuus ſumi deberet. Quibus notatis perſpicuum eſt, motum initialem ad caſum primum referri debere, ſi fuerit $f < a\zeta$; ad ſecundum vero ſi fuerit $f > a\zeta$; ac denique ad tertium ſi fuerit $f = a\zeta$. Quo autem omnes iſtae varietates clarius perſpici queant, planum IO primum aſſumamus horizontale, deinde vero ei talem inclinationem

tri-

tribuamus, vt ſit tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, tum vero etiam vt ſit tang. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, vbi caſus intermedius tang. $\omega = \frac{aa+kk}{3kk}$ euolutionem peculiarem meretur. Denique vero etiam ipſi plano IO inclinationem ſurſus directam tribuemus, ita vt angulus ω negatiuum valorem obtineat.

I. De motu globi ſuper plano horizontali.

§. 4. Sit IO planum horizontale, motus vero in ipſo puncto I inchoauerit, vbi celeritas progreſſiua ſecundum IO fuerit $= f$, celeritas vero angularis in ſenſum SAB $= \zeta$, radio globi exiſtente CA $= a$ et momento inertiae $= Pkk$, denotante P pondus globi. Hinc autem elapſo tempore $= t$ ſec. globus confecerit motu progreſſiuo ſpatium IS $= s$, motu vero gyratorio angulum ACS $= \Phi$, quibus poſitis pro noſtris tribus caſibus habebimus ſequentes aequationes differentiales ſecundi gradus: Tab. II. Fig. 7.

I. Si fuerit $\frac{ds}{dt} < \frac{ad\Phi}{dt}$, erit 1°. $\frac{dds}{2gdt^2} = \frac{1}{5}$ et 2°. $\frac{dd\Phi}{2gdt^2} = -\frac{a}{5kk}$;

II. Si fuerit $\frac{ds}{dt} > \frac{ad\Phi}{dt}$, erit 1°. $\frac{dds}{2gdt^2} = -\frac{1}{5}$ et 2°. $\frac{dd\Phi}{2gdt^2} = \frac{a}{5kk}$;

III. Si fuerit $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, erit 1°. $\frac{dds}{2gdt^2} = \lambda$ et 2°. $\frac{dd\Phi}{2gdt^2} = -\frac{a\lambda}{kk}$;

vbi eſſe debet $\lambda = -\frac{kk}{aa+kk}$ tang. ω, ergo $\lambda = 0$. Hos igitur caſus pro diuerſitate ſtatus initialis percurramus.

Exemplum I.

§. 5. Ponamus igitur primo globo initio in I ſolum motum progreſſiuum eſſe impreſſum celeritate $= f$.

Statim igitur, ſaltem ab initio, vbi $t = 0$, ob $f > a\zeta$, ſeu $\frac{ds}{dt} > \frac{a\,d\Phi}{dt}$, hic caſus ſecundus locum habebit, vnde binas illas aequationes integrando habebimus $\frac{ds}{dt} = -\frac{2}{3}gt + f$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2agt}{3kk}$. Hae igitur aequationes tamdiu locum habebunt, quamdiu fuerit $\frac{ds}{dt} > \frac{a\,d\Phi}{dt}$, hoc eſt donec fiat

$$f - \frac{2}{3}gt > \frac{2aagt}{3kk},$$

vnde patet hunc motum eovsque tantum eſſe duraturum, quoad fiat $f - \frac{2}{3}gt = \frac{2aagt}{3kk}$, id quod eueniet elapſo tempore $t = \frac{3fkk}{2g(aa+kk)}$. Poſt hoc vero tempus motus cadet in caſum tertium, et globus vtroque motu tam progreſſiuo quam angulari, quem hoc momento habuerit, conſtanter in infinitum progredietur. Poſito autem $t = \frac{3fkk}{2g(aa+kk)}$ reperitur celeritas progreſſiua $\frac{ds}{dt} = \frac{aaf}{aa+kk}$, celeritas vero angularis $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{af}{aa+kk}$.

§. 6. Totum ergo huius globi motum in duas partes partiri oportet, quarum prior ſecundum caſum ſecundum abſoluitur, poſterior vero ſecundum caſum tertium, vbi pars prior durabit per tempus $t = \frac{3fkk}{2g(aa+kk)}$. Quare ſi ſtatus globi pro minori tempore t quaeratur, ex formulis ſuperioribus habebimus $\frac{ds}{dt} = f - \frac{2}{3}gt$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2agt}{3kk}$, pro vtraque globi celeritate. Vnde patet, celeritatem progreſſiuam, quae initio erat $= f$, continuo decreſcere, eiusque decrementa tempori eſſe proportionalia. Contra vero celeritas angularis, quae initio erat nulla, continuo creſcit, atque etiam tempori proportionaliter. Quodſi has formulas differentiales denuo integremus, reperiemus primo totum ſpatium tempore t percurſum, $IS = s = ft - \frac{1}{3}gtt$, et angulum, per

quem

quem ab initio iam ſe conuertit, ſcil. $ACS = \Phi = \frac{agtt}{2kk}$. Hae autem formulae diutius non durant, quam donec fiat $t = \frac{3fkk}{2g(aa+kk)}$; in fine autem huius temporis ſpatium confectum erit $s = \frac{3ffkk(2aa+kk)}{4g(aa+kk)^2}$, totus autem angulus conuerſionis erit $\Phi = \frac{9affkk}{4g(aa+kk)^2}$. Poſterior autem motus pars nulla laborat difficultate, quia vterque motus eſt vniformis et perpetuo talis manet.

§. 7. Cum igitur in priore motus parte frictio motui aduerſetur, etiam eius vis viua diminuatur neceſſe eſt, quam diminutionem expendiſſe opere etiam erit pretium. Conſideremus igitur primo vim viuam globi in ipſo motus initio, quae erat Pff, denotante ſcilicet P maſſam globi. Deinde vero in genere conſtat, ſi eiusdem globi celeritas progreſſiua fuerit $= \frac{ds}{dt}$, angularis vero $= \frac{d\Phi}{dt}$, eius vim viuam fore $= P\left(\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kk\,d\Phi^2}{dt^2}\right)$, quae ergo formula pro poſteriori motus parte, vbi vidimus eſſe

$$\frac{ds}{dt} = \frac{aaf}{aa+kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{af}{aa+kk},$$

praebet vim viuam

$$\frac{Paaff(aa+kk)}{(aa+kk)^2} = \frac{Paaff}{aa+kk}$$

quae ergo vtique minor eſt quam initio, eiusque portio, quae periit, eſt $\frac{Pffkk}{aa+kk}$. Quare ſi globus ex materia homogenea fuerit confectus, quoniam tum eſt $kk = \frac{2}{5}aa$, portio vis viuae in hoc motu amiſſa erit $\frac{2}{7}Pff$, ideoque vis viua ſuperſtes $= \frac{5}{7}Pff$, quod ſcilicet vis viuae decrementum frictioni eſt tribuendum.

§. 8. Ponamus exempli gratia radium globi a eſſe vnius digiti, et kk proinde $= \frac{2}{5}$ digitos quadratos, ſiquidem glo-

globus ex materia conſtet homogenea; tum vero globo celeritas initio impreſſa ſit, qua ſingulis minutis ſecundis percurrere potuiſſet ſpatium 5 pedum, ſiue 60 digitorum, ita vt fuerit $f = 60$. Hoc poſito prior motus pars durabit per tempus $t = \frac{15''}{112}$, hoc eſt aliquanto minus quam $\frac{1''}{7}$; vnde intelligitur partem motus priorem plerumque per quam minimum temporis ſpatium durare. Deinde vero hoc tempore elapſo celeritas progreſſiua erit $42\frac{6}{7}$ dig. celeritas autem angularis erit etiam $42\frac{6}{7}$ dig. quae per peripheriam circuli 2π diuiſa oſtendet numerum reuolutionum ſingulis minutis ſecundis peractarum, qui ergo numerus erit 7 propemodum; hocque motu globus conſtanter vlterius progredietur, niſi quatenus ab illis obſtaculis tandem exſtinguitur. Spatium autem parte priore motus abſolutum erit $s = 6\frac{8}{9}$.

Exemplum 2.

§. 9. Ponamus nunc globo initio ſolum motum gyratorium eſſe impreſſum in ſenſum S A B, cuius celeritas angularis ſit $= \zeta$, ita vt fuerit $f = 0$. Hinc patet, ſaltem ſtatim ab initio motum pertinere ad caſum primum, quo $\frac{ds}{dt} < \frac{ad\Phi}{dt}$ vnde formulae ſemel integratae oriuntur

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} g t \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2agt}{3kk}$$

quae formulae tamdiu valebunt quamdiu fuerit

$$\frac{ad\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt} \text{ h. e. quamdiu } a\zeta - \frac{2aagt}{3kk} > \frac{2}{3} g t.$$

Euidens autem eſt has duas formulas continuo magis ad aequalitatem adpropinquare, quam adeo attingent elapſo tempore $t = \frac{3akk\zeta}{2g(aa+kk)}$, tum autem fiet

$$\frac{ds}{dt} = \frac{akk\zeta}{aa+kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{kk\zeta}{aa+kk}$$

dein-

deinceps igitur globus hoc motu voluendo perpetuo vniformiter progredietur.

§. 10. Totum igitur hunc motum in duas partes partiri conuenit, in quarum priore motus gyratorius continuo decreſcit ſecundum formulam $\frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2agt}{3kk}$, contra vero motus progreſſiuus ſecundum formulam $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}gt$, et vterque tempori proportionaliter. Hinc igitur porro integrando obtinebimus ſpatium $s = \frac{1}{3}gtt$ et angulum $\Phi = \zeta t - \frac{agtt}{3kk}$, vnde, quoniam haec motus pars durat per tempus $t = \frac{3akk\zeta}{2g(aa+kk)}$, totum ſpatium hoc tempore confectum erit $s = \frac{3aak^4\zeta\zeta}{4g(aa+kk)^2}$, angulus autem conuerſione abſolutus fiet

$$ACS = \Phi = \frac{3akk\zeta\zeta(aa+2kk)}{4g(aa+kk)}.$$

Elapſo autem hoc tempore motus abibit in prouolutionem perfectam, celeritate progreſſiua $\frac{akk\zeta}{aa+kk}$ et angulari $= \frac{kk\zeta}{aa+kk}$; vbi imprimis notari meretur, has celeritates plane non a quantitate frictionis pendere, quoniam character frictionis $\frac{1}{5}$ ex calculo abiit, vnde effectus frictionis in hoc tantum conſiſtit, quod motus globi vel citius vel tardius ad vniformitatem perducatur, id quod etiam in caſu praecedentis exempli contigit.

§. 11. Conſideremus nunc etiam vim viuam globi, quatenus ob frictionem diminuitur, quae cum initio fuiſſet $Pkk\zeta\zeta$, in motu vniformi fiet $= P\left(\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kkd\Phi^2}{dt^2}\right)$, quae expreſſio ob

$$\frac{ds}{dt} = \frac{akk\zeta}{aa+kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{kk\zeta}{aa+kk}$$

ideoque $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, abit in hanc $\frac{Pk^4\zeta\zeta}{aa+kk}$. Periit ergo ob fric-

tionem vis viua $\frac{Paakk\zeta\zeta}{aa+kk}$, vbi iterum notaſſe iuuabit, eandem vim viuam perire, ſiue frictio fuerit maior ſiue minor; ſemper enim pars amiſſa ſe habebit ad partem ſuperſtitem vt $aa:kk$; in priore exemplo autem haec ratio fuit inuerſa.

§. 12. Ponamus exempli gratia globo initio tantum motum gyratorium fuiſſe impreſſum, quo tempore vnius minuti ſecundi confecerit 5 reuolutiones, ita vt fuerit $\zeta = 10\,\pi$. Praeterea vero ſumamus fuiſſe $kk = \frac{2}{5}aa$, pro materiae homogeneitate; et vt ante $a = 1$, vbi eiusmodi menſuras ſtatuimus, vt fuerit $g = 16$ pedum $= 16 \cdot 12$ digitorum, quibus poſitis diminutio motus durabit per tempus $t = \frac{5}{224}\pi$ ſec. $= 0,0701$, ſiue proxime $t = \frac{1}{14}$ ſec. quo tempore conficietur ſpatium $s = 8,97$, ſiue fere 9 dig. Dehinc vero celeritas progreſſiua erit $\frac{ds}{dt} = 17.952$ digit. ſiue fere 18 digitos vno minuto ſecundo conficiet, et tanta etiam erit celeritas angularis, quae per $2\,\pi$ diuiſa dat numerum reuolutionem 2,857 ſiue 3 proxime, tot ſcilicet reuolutiones globus ſingulis minutis ſecundis abſoluet.

Exemplum 3.

§. 13. Ponamus iam generalius globo initio duplicem imprimi motum, alterum progreſſiuum celeritate $= f$, alterum gyratorium celeritate angulari $= \zeta$, ita tamen vt ſit $f > a\zeta$, ideoque motus ſaltem ab initio ad caſum ſecundum ſit referendus. Prima igitur integratio dat

$$\frac{ds}{dt} = f - \frac{2}{3}gt \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \zeta + \frac{2agt}{3kk},$$

haeque formulae valebunt, quamdiu fuerit

$$\frac{ds}{dt} > \frac{ad\Phi}{dt}, \text{ hoc eſt } f - \frac{2}{3}gt > a\zeta + \frac{2aagt}{3kk}$$

vnde

vnde iſta motus pars durabit per tempus $t = \frac{3kk(f - a\zeta)}{2g(aa + kk)}$, quo tempore elapſo motus fiet aequabilis, ita vt ſit

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt} = \frac{a(af + \zeta kk)}{aa + kk},$$

quae formula non amplius pendet a quantitate frictionis ſicque effectus frictionis in hoc tantum conſiſtit, vt quo maior ea fuerit, eo citius motus globi ad hanc aequabilitatem pertingat, quam ſimulac attigerit, globus deinceps perpetuo eundem motum ſit conſeruaturus.

§. 14. Cum igitur prior motus pars duret per tempus $t = \frac{3kk(f - a\zeta)}{2g(aa + kk)}$, interea globus percurret ſpatium

$$s = ft - \tfrac{1}{3}gtt = t(f - \tfrac{1}{3}gt).$$

Hoc ſpatium erit

$$s = \frac{3kk(f + a\zeta)(f(2ca + kk) + \zeta akk)}{4g(aa + kk)},$$

quo ergo percurſo motus demum euadet aequabilis. Totus autem angulus motu gyratorio interea abſolutus erit

$$\Phi = \zeta t + \frac{agtt}{3kk} = t\left(\zeta + \frac{agt}{3kk}\right) = \frac{3kk(f - a\zeta)(\zeta(aa + 2kk) + af)}{4g(aa + kk)^2},$$

quae formula per peripheriam circuli ſeu 2π diuiſa praebebit numerum reuolutionum integrarum, quas globus interea peregerit.

§. 15. Denotante P globi pondus ſeu maſſam, eius vis viua ipſo motus initio erit $P(ff + \zeta\zeta kk)$. Pro motu autem aequabili deinceps ſequente vis viua globi erit

$$P\left(\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kkd\Phi^2}{dt^2}\right)^2 = P\frac{d\Phi^2}{dt^2}(aa + kk),$$

cuius ergo magnitudo erit $\frac{P(af + \zeta kk)^2}{aa + kk}$, quae ergo erit vis viua adhuc ſuperſtes, ſicque vis viua, quae in priore mo-

ſus parte interiit, erit $\frac{Pkk(f-a\zeta)^2}{aa+kk}$, quae ergo ſemper erit poſitiua, niſi fuerit $f=a\zeta$, hoc eſt niſi motus globi ſtatim ab initio fuerit aequabilis, globusque ſtatim acceperit prouolutionem perfectam.

§. 16. Omnino autem Phaenomena prorſus ſingularia ſe prodent, quando motus gyratorius globo initio impreſſus in ſenſum contrarium verget, ita vt angulus ζ negatiuum obtinuerit valorem, ad quae Phaenomena inveſtiganda ponamus $\zeta=-\eta$, ita vt η fuerit celeritas angularis in ſenſum contrarium B A S globo impreſſa. Tum igitur, cum motus euaſerit aequabilis, fiet

$$\frac{ds}{dt}=\frac{a\,d\Phi}{dt}=\frac{a(af-\eta kk)}{aa+kk},$$

vnde patet, ſi fuerit $\eta=\frac{af}{kk}$, tum motum globi ad quietem redigi, id quod eueniet poſt tempus $t=\frac{3kk(f+\eta a)}{2g(aa+kk)}$, quo tempore globus conficiet ſpatium

$$s=\frac{3kk(f+\eta a)(f(2aa+kk)-\eta akk)}{4g(aa+kk)^2}.$$

Quia autem modo ſumſimus $\eta=\frac{af}{kk}$, illud tempus erit $\frac{3f}{2g}$, ſpatium autem percurſum $s=\frac{3ff}{4g}$, vbi notari meretur, quantitatem k ex calculo eſſe egreſſam; interim tamen in ipſo valore η, quem aſſumſimus, haec quantitas ineſt, quandoquidem ſumſimus $\eta=\frac{af}{kk}$; vnde ſi globus ex materia vniformi conſtet, ob $kk=\frac{2}{5}aa$ hoc Phaenomenon locum habebit ſi fuerit $\eta=\frac{5f}{2a}$, ideoque $\eta a=\frac{5}{2}f$, vbi ηa exprimit celeritatem motus gyratorii in ipſo contactu ſuper plano retro directam, quae ergo ſe ad celeritatem progreſſiuam habere debet vt 5 : 2.

§. 17.

§. 17. At ſi motus gyratorius initio impreſſus fuerit minor, ſiue $\eta < \frac{af}{kk}$, tum globus retinebit celeritatem quandam in motu aequabili, et phaenomena ſimilia erunt iis quae ante euoluimus. Verum ſi fuerit $\eta > \frac{af}{kk}$, motus globi ante ad quietem redigetur quam ſeſe ad aequabilitatem compoſuerit, id quod inde patet, quod pro motu aequabili prodeat

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt} = \frac{a(af - \eta kk)}{aa + kk},$$

ideoque quantitas negatiua, ſcilicet motus aequabilis retro erit directus. Videamus igitur vbi globus incipiat fieri retrogradus, ſiue vbi celeritas globi progreſſiua $\frac{ds}{dt}$ nihilo fiat aequalis, id quod eueniet elapſo tempore $t = \frac{3f}{2g}$, quod tempus minus eſt eo, quo motus euadit aequabilis, quippe quod erat $\frac{3kk(f + \eta a)}{2g(2a + kk)}$, propterea quod ηkk ſupponitur maius quam af. Spatium autem vsque ad punctum quietis percurſum erit $s = \frac{3ff}{4g}$, quod ergo non a quantitate celeritatis pendet. At vero ſpatium s, ubi motus aequabilis incipit, erit

$$s = \frac{3kk(f + \eta a)(f(2aa + kk) - \eta akk)}{4g(2a + kk)^2},$$

quod igitur ſpatium eſſe poterit vel poſitiuum vel negatiuum; poſitiuum ſcilicet erit quamdiu fuerit $\eta < \frac{f(2aa + kk)}{akk}$, hoc eſt quamdiu η continebitur intra limites $\frac{f(2aa + kk)}{akk}$ et $\frac{af}{kk}$. Sed motus poſt reuerſionem in ipſo puncto I incipiet retrouergere, quando fuerit $\eta = \frac{f(2aa + kk)}{akk}$; verum ſi η hunc valorem ſuperet, globus terminum initialem I transgredietur, antequam motus aequabilis incipiet.

Exemplum 4.

§. 18. Tribuamus primo globo duplicem motum initialem litteris f et ζ contentum; verum iam ſit $a\zeta > f$, ita vt motus immediate ſubſequens referatur ad noſtrum caſum primum, vnde oritur

$$\frac{ds}{dt} = f + \tfrac{2}{3} g t, \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2 a g t}{3 k k},$$

qui motus ergo durabit, donec fiat

$$f + \tfrac{2}{3} g t = a \zeta - \frac{2 a a g t}{3 k k},$$

ideoque $t = \frac{3 k k (a \zeta - f)}{2 g (a a + k k)}$, quo tempore elapſo motus fiet vniformis, eritque

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a\, d\Phi}{dt} = \frac{a (a f + \zeta k k)}{a a + k k},$$

qui ergo ſemper in conſequentia tendet. Ante autem quam globus hunc terminum attingit, ſpatium tempore t percurſum erit $s = f t + \tfrac{1}{3} g t t$, ergo totum ſpatium vsque ad aequabilitatem confectum erit

$$s = \frac{3 k k (a \zeta - f)(f (2 a a + k k) + a \zeta k k)}{4 g (a a + k k)}.$$

Hinc autem ſingularia Phaenomena nulla ſe offerunt, niſi forte velimus celeritatem f negatiuam accipere. Verum talis hypotheſis omnino foret ſuperflua, quia tantum opus eſſet plagas dextrorſum et ſiniſtrorſum inter ſe permutare, vnde motus ad caſum ante tractatum reduceretur.

§. 19. Tandem cum hoc caſu vis viua globo initio impreſſa ſit $= P (f f + \zeta \zeta k k)$, vbi motus aequabilis fieri incipit, vis viua vt ſupra vidimus erit

$$\frac{P\, d\Phi^2}{d t^2} (a a + k k) = \frac{P (a f + \zeta k k)^2}{a a + k k},$$

quae cum ſit vis viua poſt frictionis effectum reſidua, erit

vis

vis viua per frictionem amiſſa $= \frac{Pkk(a\zeta - f)^2}{aa+kk}$. Hoc igitur pacto omnia phaenomena, quae in motu globi ſuper plano locum inuenire poſſunt, ſatis dilucide expoſuimus. Verum tamen perpetuo iſta reſtrictio ſubintelligenda eſt, quod globo alius motus gyratorius non imprimatur, niſi circa axem horizontalem, eumque adeo ad directionem motus progresſiui normalem. Quod ſi enim alios motus gyratorios admittere voluerimus, tota inueſtigatio ad longe aliam Mechanicae partem reuolueretur, cuius principia in tractatu meo *De Motu Corporum Rigidorum* fuſius pertractaui.

II. De motu globi ſuper plano inclinato deſcendentis.

§. 20. Sit vt ſupra inclinatio plani ad horizontem HIO $= \omega$, globi pondus ſeu maſſa $= P$, radius $AC = a$ et momentum inertiae $= Pkk$; primo autem ponamus globum initio in I fuiſſe in perfecta quiete et elapſo tempore t perueniſſe in S, percurſo ſpatio $IS = s$. Iam ſi nulla adeſſet frictio, globus rependo eſſet deſcenſurus ſine vllo motu gyratorio, eiusque motum expreſſum iri conſtat hac formula: $\frac{dds}{2g\,dt^2} = \text{ſin.}\,\omega$, vnde primo deducitur eius celeritas progreſſiua $\frac{ds}{dt} = 2gt\,\text{ſin.}\,\omega$ et ipſum ſpatium percurſum $s = gtt\,\text{ſin.}\,\omega$, ita vt futurum ſit tempus $t = \sqrt{\frac{s}{g\,\text{ſin.}\,\omega}}$, hincque celeritas $\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gs\,\text{ſin.}\,\omega}$, vbi $s\,\text{ſin.}\,\omega$ exprimit altitudinem lapſu confectam. Tum vero vis viua in S acquiſita cum ſit $= P\frac{ds^2}{dt^2}$, manifeſtum eſt vim viuam tempore t acquiſitam fore $P.\,4ggtt\,\text{ſin.}\,\omega^2$, quae per ſpatium ita exprimitur, vt ſit $= P.\,4gs\,\text{ſin.}\,\omega$. Tab. II. Fig 8.

Exem-

Exemplum I.

§. 21. Nunc admiſſa frictione conſideremus conditiones, ſub quibus globus ſine vllo attritu voluendo deſcendet, ita vt ſit $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, et quia huiusmodi motus non totam vim frictionis exigit, quae eſt $\frac{1}{3}$ P coſ. ω, ſit eius portio ad hoc requiſita $= \lambda$ P coſ. ω, vnde motus his duabus formulis exprimetur:

I. $\frac{dds}{2g\,dt^2} = \text{ſin.}\,\omega - \lambda\,\text{coſ.}\,\omega.$

II. $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{\lambda\,a\,\text{coſ.}\,\omega}{kk}.$

Sicque ob $dds = a\,dd\Phi$, per hypotheſin, neceſſe eſt vt ſit $\text{ſin.}\,\omega - \lambda\,\text{coſ.}\,\omega = \frac{\lambda\,aa\,\text{coſ.}\,\omega}{kk}$, ideoque

$$\lambda = \frac{kk\,\text{ſin.}\,\omega}{(aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega} = \frac{kk}{aa + kk}\,\text{tang.}\,\omega,$$

quare cum λ non debeat excedere $\frac{1}{3}$, talis prouolutio perfecta locum habebit, quando fuerit $\text{tang.}\,\omega < \frac{aa + kk}{3kk}$, vnde duo caſus perpendendi occurrunt, prout angulus ω fuerit vel minor vel maior iſto valore aſſignato.

§. 22. Sit igitur $\text{tang.}\,\omega < \frac{aa + kk}{3kk}$, vt globus prouolutione perfecta deſcendat, et cum frictio ſit vt vidimus $\lambda = \frac{kk\,\text{tang.}\,\omega}{aa + kk}$, erit

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \frac{aa\,\text{ſin.}\,\omega}{aa + kk} \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{a\,\text{ſin.}\,\omega}{aa + kk},$$

vnde integrando nanciſcimur

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2g\,aat\,\text{ſin.}\,\omega}{aa + kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2g\,at\,\text{ſin.}\,\omega}{aa + kk},$$

hincque porro $s = \frac{g\,aatt\,\text{ſin.}\,\omega}{aa + kk}$ et angulum $\Phi = \frac{g\,att\,\text{ſin.}\,\omega}{aa + kk}$. Illa expreſſio dat $tt = \frac{(aa + kk)\,s}{g\,aa\,\text{ſin.}\,\omega}$, quare cum vis viua ſit

ſit $\frac{P d \Phi^2}{d t^2}(aa+kk)$, per tempus t acquiritur haec vis viua: $\frac{P.4gg aatt\, \text{ſin.}\, \omega^2}{aa+kk}$, quae ergo minor eſt quam ſi frictio abeſſet idque in ratione $aa:(aa+kk)$. At vero dum globus percurrit ſpatium $= s$, vis viua quam acquiret erit $P.4gs\, \text{ſin.}\, \omega$, quae ergo eadem eſt ac ſi nulla adeſſet frictio. In genere autem perpetuo tenendum eſt, quoties motus ſine attritu abſoluitur, tum ſemper eandem vim viuam generari, ac ſi plane nulla adeſſet frictio, id quod generaliter ita oſtendi poteſt.

Sint aequationes differentio-differentiales

$$\frac{dds}{2gdt^2} = Q - \lambda R \text{ et } \frac{dd\Phi}{2gat^2} = \frac{\lambda a R}{kk},$$

ita vt ſit $ds = a d\Phi$. Iam cum ex poſteriore ſit

$$\frac{kkdd\Phi}{2gadt^2} = \lambda R, \text{ erit addendo}$$

$$\frac{dds}{2gdt^2} + \frac{kkdd\Phi}{2gadt^2} = Q;$$

haec aequatio ducatur in $2ds = 2ad\Phi$, vt fiat

$$\frac{2dsdds + 2kkd\Phi dd\Phi}{2gdt^2} = 2Q\,ds,$$

vnde integrando obtinemus

$$\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kkd\Phi^2}{dt^2} = 4g\int Q\,ds,$$

quae aequatio ſi per maſſam P multiplicetur, prior pars erit vis viua, quae ergo ſemper aequalis eſt $4gP\int Q\,ds$, prorſus vt regula principii virium viuarum poſtulat.

§. 23. *Caſus II.* Perpendamus nunc etiam alterum caſum, quo tang. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, et quia tota vis frictionis impenditur, erit $\lambda = \frac{1}{3}$, ideoque

$$1^\circ.\ \frac{dds}{2gdt^2} = \text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\text{coſ.}\,\omega \text{ et}$$

$$2^\circ.\ \frac{dd\Phi}{2gat^2} = \frac{a\,\text{coſ.}\,\Phi}{3kk},$$

 vnde

vnde colliguntur celeritates

$$\frac{ds}{dt} = 2gt\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}gt\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2agt\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

quarum illa maior erit quam iſta. Tum vero porro erit

$$s = gtt\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}gtt\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et } \Phi = \frac{agtt\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

ex quarum aequationum priore fit $gtt = \frac{3s}{3\,\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega}$.

§. 24. Contemplemur nunc vim viuam tempore t acquiſitam, ſcilicet $P\left(\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kkd\Phi^2}{dt^2}\right)$, quae euadet

$$P.4ggtt\left(\text{ſin.}\,\omega^2 - \tfrac{2}{3}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega + \frac{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega^2}{kk}\right),$$

quae expreſſio ad ſpatium s traducta praebet hanc expresſionem:

$$P.\frac{12gs}{3\,\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega}\left(\text{ſin.}\,\omega^2 - \tfrac{2}{3}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega + \frac{aa+kk}{kk}\,\text{coſ.}\,\omega^2\right),$$

quae, vti perpendenti facile patebit, minor eſt quam ſi nulla eſſet frictio, hoc eſt minor quam $P.4gs\,\text{ſin.}\,\omega$.

§. 25. Quo hoc clarius appareat, conſtet globus ex materia vniformi, vt ſit $kk = \frac{2}{5}aa$, et conditio inclinationis poſtulat vt ſit tang. $\omega > \frac{7}{6}$, hinc vis viua per ſpatium s acquiſita erit

$$\frac{12gPs}{3\,\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega}\left(\text{ſin.}\,\omega^2 - \tfrac{2}{3}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega + \tfrac{7}{18}\,\text{coſ.}\,\omega^2,\right.$$

ſicque oſtendi oportet eſſe

$$\frac{3}{3\,\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega}\left(\text{ſin.}\,\omega^2 - \tfrac{2}{3}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega + \tfrac{7}{18}\,\text{coſ.}\,\omega^2 < \text{ſin.}\,\omega,\right.$$

hoc eſt

$$\text{ſin.}\,\omega^2 - \tfrac{2}{3}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega + \tfrac{7}{18}\,\text{coſ.}\,\omega^2 < \text{ſin.}\,\omega^2 - \tfrac{1}{3}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega, \text{ h. e.}$$

$$-\tfrac{1}{3}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega + \tfrac{7}{18}\,\text{coſ.}\,\omega^2 < 0, \text{ ſiue}$$

$$\tfrac{7}{18}\,\text{coſ.}\,\omega^2 < \tfrac{1}{3}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega, \text{ ſiue}$$

$\frac{7}{6}$ coſ. ω

$\frac{7}{2}$ coſ. $\omega < $ ſin. ω, ideoque tang. $\omega > \frac{7}{2}$, quae eſt ipſa conditio praeſcripta.

§. 26. *Caſus III.* Conſideremus etiam ipſum limitem, et ſumamus

$$\text{tang. } \omega = \frac{aa + kk}{3kk}, \text{ ſiue}$$

$$\text{ſin. } \omega = \frac{aa + kk}{3kk} \text{ coſ. } \omega,$$

et in deſcenſu ambae celeritates erunt

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2gaat \text{ coſ.}\omega}{3kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2gat \text{ coſ.}\omega}{3kk},$$

ſicque etiamnunc erit $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, quandoquidem haec inclinatio eſt maxima, ſub qua globus ſine attritu deſcendit, ideoque etiam per ſpatium s eadem vis viua acquiritur ac ſi frictio abeſſet.

§. 27. Quod ſi denique planum adeo verticaliter erigatur, vt ſit $\omega = 90$, motus vtique ad caſum noſtrum poſteriorem erit referendus; tum igitur erit

$$\frac{ds}{dt} = 2gt \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Hoc ſcilicet caſu nullus plane motus gyratorius orietur, quia, ob preſſionem euaneſcentem, etiam nulla frictio locum habet, ſed globus libere verticaliter deſcendit, vnde etiam vis viua nullam diminutionem patietur, quippe quae pro ſpatio percurſo $= s$ erit P. $4gs$.

Exemplum 2.

§. 27. Ponamus nunc globo initio in I ſolum motum progreſſiuum fuiſſe impreſſum cum celeritate $= f$, et quia globus rependo deſcendere incipiet, ſtatim ſe exeret

tota vis frictionis, vnde habebitur

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{a\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

vnde integrando elicitur:

$$\frac{ds}{dt} = f + 2gt\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}gt\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk}.$$

Hic autem motus diutius non durabit quam donec fiat $ds = ad\Phi$, vbi prouolutio perfecta incipiet; hoc igitur continget, quando fiet

$$f + 2gt\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}gt\,\text{coſ.}\,\omega = \frac{2gaat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

hoc eſt elapſo tempore

$$t = \frac{3fkk}{2g((aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)},$$

qui igitur caſus locum habere nequit, niſi fuerit

$$(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega > 3kk\,\text{ſin.}\,\omega \text{ ſiue}$$

$$\text{tang.}\,\omega < \frac{aa+kk}{3kk}.$$

Nam ſi fuerit tang. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, motus nunquam plane ad prouolutionem perfectam redibit; vnde duos caſus euolui conueniet.

§. 29. *Caſus I.* Sit igitur primo tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$ et noſter globus voluendo deſcendere incipiet elapſo tempore

$$t = \frac{3fkk}{2g((aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)},$$

tum igitur eius celeritas progreſſiua erit

$$\frac{ds}{dt} = f + \frac{3fkk(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega} = \frac{aaf\,\text{coſ.}\,\omega}{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega},$$

ac celeritas gyratoria

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{af\,\text{coſ.}\,\omega}{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega},$$

vnde

vnde patet fore $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, quare cum vis viua ſit $\frac{P\,d\Phi^2}{dt^2}(aa + kk)$, erit ea praeſenti momento

$$= \frac{P\,aaff\,(aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega^2}{((aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)^2},$$

vnde haud difficulter iudicabitur, quantum vis viua ob frictionem fuerit diminuta.

§. 30. Quoniam igitur iuenimus, quonam temporis momento prouolutio perfecta incipiet; videamus etiam quantum ſpatium globus hucusque percurrerit. Hunc in finem, quia erat

$$\frac{ds}{dt} = f + 2g\,t\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}\,g\,t\,\text{coſ.}\,\omega,$$

hinc nanciſcimur integrando

$$s = ft + gtt(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) = t(f + gt(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)),$$

Fiat nunc

$$t = \frac{3fkk}{2g((aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)},$$

et alter factor euadet

$$\frac{(2aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kkf\,\text{ſin.}\,\omega}{2((aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)},$$

vnde totum iſtud ſpatinm percurſum erit

$$s = \frac{3ffkk((2aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)}{4g((aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)^2}.$$

§. 31. Hinc ſi globum ex materia vniformi conſtare aſſumamus, vt ſit $kk = \frac{2}{5}aa$, iſtud ſpatium ita prodit expreſſum: $\frac{g\,ff\,(2\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega)}{g\,(2\,\text{coſ.}\,\omega - 6\,\text{ſin.}\,\omega)^2}$, hoc autem ſpatio percurſo prouolutio fiet perfacta et vterque motus vniformiter accelerabitur.

§. 32. *Caſus II.* Sit nunc tang. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, et iam vidimus, globum nunquam ad prouolutionem perfectam eſſe perventurum, vnde totus motus his formulis determinabitur:

$$\frac{ds}{dt} = f + 2gt\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}gt\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

hincque denuo integrando fiet

$$s = ft + gtt\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}gtt\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et } \Phi = \frac{gatt\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

hoc igitur motu attritus perpetuo aderit cum celeritate

$$\frac{ds}{dt} - \frac{ad\Phi}{dt} = f + 2gt\,(\text{ſin.}\,\omega - (\frac{aa+kk}{3kk})\,\text{coſ.}\,\omega),$$

quae ergo expreſſio, quia ſin. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$ coſ. ω, continuo creſcet.

Exemplum 3.

§. 33. Ponamus globo initio in I impreſſum fuiſſe motum tantum gyratorium in ſenſum SAB, cum celeritate angulari $= \zeta$, ac manifeſtum eſt, ſaltem mox ab initio attritum fore retro directum, ita vt tota frictionis vis motui gyratorio ſit contraria, motum vero progreſſivum acceleret, quandoquidem iſte motus ad noſtrum caſum primum erit referendus, vnde habebimus

$$\frac{dds}{2gdt^2} = \text{ſin.}\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et } \frac{dd\Phi}{2gdt^2} = -\frac{a\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

vnde integrando nanciſcimur

$$\frac{ds}{dt} = 2gt\,(\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

huncque motum globus tamdiu proſequetur, quamdiu fuerit $\frac{ad\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, hoc eſt quamdiu fuerit

$$a\zeta - \frac{2gaat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk} > 2gt\,(\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega),$$

quod eueniet quamdiu fuerit

$$t < \frac{a}{2g\,(\text{ſin.}\,\omega + (\frac{ao+kk}{3kk})\,\text{coſ.}\,\omega)},\text{ ſiue}$$

$$t < \frac{3\zeta a k k}{2g(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}.$$

Semper ergo iſte motus tandem ad prouolutionem perfectam pertinget, elapſo ſcilicet tempore

$$t = \frac{3\zeta akk}{2g(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}$$

tum enim euadet

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3\zeta akk(\text{ſin.}\,\omega + \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)}{3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega} \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\zeta kk(\text{ſin.}\,\omega + \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)}{3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega}.$$

§. 34. Poſtquam autem globus ad hunc ſtatum peruenerit, videamus, qua lege motum ſuum ſit proſecuturus. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia celeritatem angularem, vbi iſte motus incipiet, eſſe $= \theta$, ita vt celeritas progreſſiua futura ſit $= a\theta$, ac pro iſtius motus continuatione has habebimus formulas:

$$\frac{dds}{2gdt^2} = \text{ſin.}\,\omega - \lambda\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et } \frac{dd\Phi}{2gdt^2} = \frac{\lambda a\,\text{coſ.}\,\omega}{kk},$$

vnde integrando colligimus

$$\frac{ds}{dt} = a\theta + 2gt(\text{ſin.}\,\omega - \lambda\,\text{coſ.}\,\omega) \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \theta + \frac{2g\lambda at\,\text{coſ.}\,\omega}{kk}$$

haecque prouolutio perfecta tamdiu durabit, quamdiu manere poterit $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, ita tamen, vt λ non vltra $\frac{1}{3}$ augeatur. Faciamus igitur $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$ et prodibit iſta aequatio:

$$2gt(\text{ſin.}\,\omega - \lambda\,\text{coſ.}\,\omega) = \frac{2g\lambda aat\,\text{coſ.}\,\omega}{kk}, \text{ ſiue}$$

$$\text{ſin.}\,\omega - \lambda\,\text{coſ.}\,\omega = \frac{\lambda aa\,\text{coſ.}\,\omega}{kk},$$

vnde fit $\lambda = \frac{kk}{aa+kk}\,\text{tag.}\,\omega$. Quod ſi ergo fuerit $\frac{kk}{aa+kk}\,\text{tang.}\,\omega < \frac{1}{3}$, prouolutio perfecta perpetuo durabit, quod ergo eueniet, ſi fue-

fuerit tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, ſicque iſta conditio non amplius a quantitate θ pendet.

§. 35. Pro inclinationibus autem maioribus, vbi tang. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, pro motu inſequente valebunt iſtae formulae:

$$\frac{ds}{dt} = a\theta + 2gt\,(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \theta + \frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk}$$

vbi ergo ſemper erit $\frac{ds}{dt} > \frac{ad\Phi}{dt}$, ideoque globus ita repende deſcendet, vt celeritas attritus deorſum vergat, cum ante hunc terminum ſurſum fuiſſet verſa; ſcilicet ante hunc terminum frictio deſcenſum promouebat, in ipſo termino ſubito euaſit $= 0$, dehinc vero ſubito motui fit contraria.

§. 36. Haec igitur exempla abunde ſufficiunt, vt ex iis omnia Phaenomena, quae in motu globi ſuper plano inclinato occurrere poſſunt, explicare valeamus; vbi vidimus imprimis duos caſus diſtingui conuenire, prout tangens inclinationis minor fuerit vel maior quam $\frac{aa+kk}{3kk}$. Interim tamen ſingularia phaenomena ſe manifeſtare poſſunt, quando inclinatio ω ſupponitur negatiua et globus ſuper plano inclinato ſurſum propellitur, quorum igitur indolem adhuc euoluemus, poſtquam vnum caſum huc pertinentem adhuc fuerimus contemplati.

Exemplum 4.

§. 37. Caſus hic imprimis notatu dignus tum locum habet, quando globo in I motus gyratorius in contrarium ſenſum, ſcilicet B A S, fuerit impreſſus, cuius celeritas angularis $= \eta$; vbi facile perſpicitur, vim frictionis retro

tro fore directam, ideoque tam motui progreſſiuo quam gyratorio contrariam, ex quo intelligitur, motum ſaltem ab initio his formulis expreſſum iri:

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = + \frac{a\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk}$$

ſiquidem angulum Φ hic ita conſideremus, quaſi celeritate $\frac{d\Phi}{dt}$ in ſenſum SAB vergeret, quo caſu vtique frictio retro vrgens motum acceleraret, quia initio poni debet $\frac{d\Phi}{dt} = -\eta$. Hinc igitur integrando erit

$$\frac{ds}{dt} = 2gt(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = -\eta + \frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk};$$

vnde patet, ſi fuerit ſin. $\omega > \frac{1}{3}$ coſ. ω, motum progreſſiuum deorſum ferri; ſin autem fuerit ſin. $\omega < \frac{1}{3}$ coſ. ω tum globum retro eſſe aſcenſurum; ſi denique fuerit ſin. $\omega = \frac{1}{3}$ coſ. ω, motum progreſſiuum ſtatim ab initio generari nullum, ſed globum per aliquod tempus in puncto I eſſe manſurum, quem caſum primo conſideremus.

§. 38. *Caſus I.* Ponamus igitur eſſe ſin. $\omega = \frac{1}{3}$ coſ. ω, ſiue tang. $\omega = \frac{1}{3}$, et cum hinc fiat $\frac{ds}{dt} = 0$, hae formulae valebunt quamdiu fuerit $0 > \frac{a\,d\Phi}{dt}$, hoc eſt quamdiu fuerit $\frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk} < \eta$. Vnde patet, globum in puncto I manſurum eſſe per tempus $t = \frac{3\eta kk}{2ga\,\text{coſ.}\,\omega}$, quoad ſcilicet totus motus gyratorius initio impreſſus fuerit extinctus, poſtmodum vero demum globus incipiet deſcendere et motus a quiete perfecta inchoabit, quem igitur globus modo in exemplo primo expoſito proſequetur. Id igitur hic potiſſimum mirandum occurrit, quod globus ab initio per aliquod tempus quaſi immotus in I perſiſtat.

§. 39. *Caſus II.* At ſi inclinatio plani minor fuerit ſcil. tang. $\omega < \frac{1}{3}$, tum ob $\frac{ds}{dt}$ negatiuum, globus retro aſcendet, dum interea motus gyratorius impreſſus continuo decreuit, et iſtae formulae tamdiu valebunt, quamdiu fuerit

$$2gt\,(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) > -a\eta + \frac{2gaat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk}, \text{ ſiue}$$

$$a\eta > 2gt\,\left(\left(\frac{aa+kk}{3kk}\right)\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega\right)$$

qui ergo motus durabit per tempus

$$t = \frac{3\eta akk}{2g\,((aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)},$$

hocque tempore elapſo erit

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3\eta akk\,(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega} \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\eta kk\,(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega}$$

quae vtraque celeritas ob ſin $\omega < \frac{1}{3}$ coſ. ω erit negatiua, ſicque globus etiamnunc ſurſum perget, neque etiamnunc motus gyratorius erit extinctus; interim tamen iam ab hoc momento prouolutio erit perfecta, eiusque motus his formulis continetur:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3\eta akk(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega} + 2gt(\text{ſin.}\,\omega - \lambda\,\text{coſ.}\,\omega)$$

et

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\eta kk\,(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega} + \frac{2g\lambda at\,\text{coſ.}\,\omega}{kk},$$

hacque lege motus continuabit, quamdiu manebit $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, dum ſcilicet λ non maior euadit quam $\frac{1}{3}$. Conſtituta igitur hac aequalitate erit

$$2gt\,(\text{ſin.}\,\omega - \lambda\,\text{coſ.}\,\omega) = \frac{2g\lambda at\,\text{coſ.}\,\omega}{kk},$$

vnde

vnde fit $\lambda = \frac{kk}{aa+kk}\,\text{tang.}\,\omega$. Hinc quia $\text{tang.}\,\omega < \frac{1}{3}$, valor ipſius λ multo magis erit minor, ideoque prouolutio perfecta perpetuo durabit. Cum autem, quando iſte motus incipit, vtraque celeritas adhuc ſit negatiua, aſcenſus durabit, donec fiat $\frac{ds}{dt} = 0$, id quod eueniet elapſo hinc tempore $t = \frac{\eta kk(aa+kk)(\text{coſ.}\,\omega - 3\,\text{ſin.}\,\omega)}{2ga\,\text{ſin.}\,\omega((aa+kk)\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)}$; tum vero poſt hoc momentum globus ex quiete per hoc planum deſcendet.

§. 40. *Caſus III.* Conſideremus nunc inclinationem maiorem, ſitque $\text{tang.}\,\omega > \frac{1}{3}$, et motus ab initio his formulis continebitur:

$$\frac{ds}{dt} = 2gt(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = -\eta + \frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk}.$$

Hicque motus durabit donec fiet

$$2gt(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) = -a\eta + \frac{2gaat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

vnde colligitur

$$a\eta = 2gt\left(\frac{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega}{3kk}\right),$$

vnde fit

$$t = \frac{3a\eta kk}{2g((aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)}.$$

Scilicet per hoc tempus motus ille prior durabit, ſi fuerit $(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega > 3kk\,\text{ſin.}\,\omega$, ſiue $\text{tang.}\,\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$. Cum autem per hypotheſin ſit $\text{tang.}\,\omega > \frac{1}{3}$, hoc tantum euenire poterit, ſi tang. ω contineatur intra hos limites: $\text{tang.}\,\omega > \frac{1}{3} < \frac{aa+kk}{3kk}$, alioquin motus ante determinatus perpetuo durabit.

§. 41. Quo autem videamus quid eueniat ſi tang. ω intra praedictos limites contineatur, breuitati conſulentes conſiderabi-

 mus

mus caſum ſpecialem quo $kk = \frac{2}{5}aa$, vbi limites erunt tang $\omega > \frac{1}{3} < \frac{7}{6}$, quem in finem ſumamus tang. $\omega = 1$ ideoque ſin $\omega =$ coſ. $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ex his autem valoribus concludimus priorem motum durare per tempus $t = \frac{6\eta a}{g\sqrt{2}}$, quo elapſo fiet $\frac{ds}{dt} = 4a\eta$ et $\frac{d\Phi}{dt} t = 4\eta$. Cum igitur elapſo tempore t fiat $\frac{ds}{dt} = 4a\eta$ et $\frac{d\Phi}{dt} = 4\eta$, hunc ſtatum tanquam initialem conſiderare licebit, in quo cum prouolutio perfecta eueniat, elapſo hinc tempore t habebimus

$$\frac{ds}{dt} = 4a\eta + 2gt(\text{ſin.}\,\omega - \lambda\,\text{coſ.}\,\omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 4\eta + \frac{2g\lambda a t \,\text{coſ.}\,\omega}{kk},$$

vndo ponendo $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$ fit

$$2gt(\text{ſin.}\,\omega - \lambda\,\text{coſ.}\,\omega) = \frac{2g\lambda aat\,\text{coſ.}\,\omega}{kk}, \text{ ſiue}$$

$$1 - \lambda = \frac{\lambda aa}{kk}, \text{ hinc } \lambda = \frac{kk}{aa+kk} = \frac{2}{7};$$

qui valor cum minor ſit quam $\frac{1}{3}$, prouolutio perfecta perpetuo durabit.

III. De aſcenſu globi ſuper plano inclinato.

Tab. II. Fig. 8. §. 42. Conſideremus igitur planum IO, cuius inclinatio ad horizontem IH ſit OIH $= \omega$, vt ante, verum hoc diſcrimine, quod cum hic globus ab I verſus O aſcendat, in praecedentibus calculis etiam angulus ω tanquam negatiuus ſpectari debeat, ſicque ſeueriores formulae etiamnunc hic locum habebunt, dummodo in iis loco ſin. ω ſcribatur $-$ ſin ω, manente coſ. ω eiusdem ſigni. Quo obſeruato peruenerit noſter globus, elapſo tempore $= t$, ex I vsque in S, ponaturque ſpatium IS $= s$, ita vt celeritas progreſſiua ſit etiamnunc $\frac{ds}{dt}$, celeritas autem gyratoria $= \frac{d\Phi}{dt}$ in ſenſum SAB directa. Hic igitur ante omnia manifeſtum

eſt

eſt, globum aſcendere plane non poſſe, niſi ipſi initio in I motus ſiue progreſſiuus ſiue gyratorius ſurſum tendens imprimatur, vnde hos caſus accuratius ſumus proſecuturi.

Exemplum I.

§. 43. Conſideremus primo caſum, quo globo in I ſolus motus progreſſiuus verſus O imprimitur, cuius celeritas ſit f, ita vt initio, quo $t=0$, fuerit $\frac{ds}{dt}=f$ et $\frac{d\Phi}{dt}=0$. Quia igitur in initio datur attritus, tota vis frictionis ſe exerit retrorſum, qua ergo motus progreſſiuus retardatur, ſimul vero gyratorius generatur in ſenſum S A B. Pro hoc igitur motu habebuntur iſtae formulae:

$$\text{I. } \frac{dds}{2g\,dt^2}=-\text{ſin. }\omega-\tfrac{1}{3}\text{coſ. }\omega \text{ et}$$

$$\text{II. } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2}=+\frac{a\,\text{coſ. }\omega}{3kk},$$

vnde integrando fit

$$\frac{ds}{dt}=f-2gt\,\text{ſin. }\omega-\tfrac{2}{3}gt\,\text{coſ. }\omega \text{ et } \frac{d\Phi}{dt}=\frac{2gat\,\text{coſ. }\omega}{3kk},$$

ex quarum aequationum priore porro colligitur

$$s=ft-gtt\,\text{ſin. }\omega-\tfrac{1}{3}gtt\,\text{coſ. }\omega.$$

Secundum hanc autem legem motus peragetur quamdiu fuerit $\frac{ds}{dt}>\frac{ad\Phi}{dt}$, hoc eſt quamdiu

$$f>2gt\left(\text{ſin. }\omega+\tfrac{1}{3}\text{coſ. }\omega+\frac{aa\,\text{coſ. }\omega}{3kk}\right) \text{ ideoque}$$

$$t<\frac{3fkk}{2g(3kk\,\text{ſin. }\omega+(aa+kk)\,\text{coſ. }\omega)},$$

durabit ergo iſte motus per tempus

$$t=\frac{3fkk}{2g(3kk\,\text{ſin. }\omega+(aa+kk)\,\text{coſ. }\omega)},$$

quo elapſo fiet celeritas progreſſiua

$$\frac{ds}{dt}=\frac{aaf\,\text{coſ. }\omega}{3kk\,\text{ſin. }\omega+(aa+kk)\,\text{coſ. }\omega}$$

et celeritas gyratoria

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{a f \operatorname{coſ}.\omega}{3kk \operatorname{ſin}.\omega + (aa + kk) \operatorname{coſ}.\omega},$$

ſpatium vero vsque ad hoc tempus percurſum erit

$$s = \frac{2ffkk(3kk \operatorname{ſin}.\omega + (2aa + kk)\operatorname{coſ}.\omega)}{4g(3kk \operatorname{ſin}.\omega + (aa + kk)\operatorname{coſ}.\omega)^2}.$$

§. 44. Quoniam hae tres formulae valores habent poſitiuos, intelligitur, per totum hoc tempus motum manere ſurſum directum ſimulque globum etiam antrorſum volui, quaecunque fuerit plani inclinatio. Quod ſi ergo globus ex materia conſtet homogenea, vt ſit $kk = \frac{2}{5}aa$, in fine huius primi motus interualli tres valores inuenti erunt:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{5f \operatorname{coſ}.\omega}{6 \operatorname{ſin}.\omega + 7 \operatorname{coſ}.\omega},$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{5f \operatorname{coſ}.\omega}{6a \operatorname{ſin}.\omega + 7a \operatorname{coſ}.\omega},$$

$$s = \frac{9ff(\operatorname{ſin}.\omega + 2\operatorname{coſ}.\omega)}{g(6\operatorname{ſin}.\omega + 7\operatorname{coſ}.\omega)^2},$$

tempus autem per quod iſte motus durabit erit

$$t = \frac{3f}{g(6\operatorname{ſin}.\omega + 7\operatorname{coſ}.\omega)}.$$

Ac ſi inſuper ſumamus inclinationem $\omega = 45°$, fiet iſtud tempus

$$t = \frac{3f\sqrt{2}}{13g} \text{ ſec. et } \frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt} = \frac{5}{13}f, \text{ atque } s = \frac{27ff\sqrt{2}}{169.g}.$$

§. 45. Quo nunc motum globi deinceps ſecuturum clarius exponamus, ſit K locus, quousque globus illo primo temporis interuallo pertigerit, ac vocemus breuitatis gratia IK $= p$, vt ſit

$$p = \frac{2ffkk(3kk \operatorname{ſin}.\omega + (2aa + kk)\operatorname{coſ}.\omega)}{4g(3kk \operatorname{ſin}.\omega + (aa + kk)\operatorname{coſ}.\omega)^2},$$

quod ergo tempore

$= 3f$

$$= \frac{3fkk}{2g(3kk \sin.\omega + (aa + kk)\cos.\omega)},$$

erit percurſum. In K autem vocemus celeritatem progreſſiuam $= q$, ita vt celeritas gyratoria $= \frac{q}{a}$, eritque

$$q = \frac{aaf \cos.\omega}{3kk \sin.\omega + (aa + kk)\cos.\omega};$$

quibus conſtitutis ſequentem motum ita inquiramus, quaſi globus in puncto K moueri incepiſſet hincque elapſo tempore t peruenerit in S, vt ſit KS $= s$ et celeritates in hoc loco $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$. Hunc igitur motum inueſtigari nobis nunc nobis eſt propoſitum, vbi tempus per ſpatium KS elapſum littera t deſignabimus, quandoquidem motus iſte longe aliam legem ſequetur ac prior, ideoque etiam diuerſam indolem habebit, ita vt in termino K principium continuitatis ſubito interrumpatur.

§. 46. Quia in k motus globi ſe ad prouolutionem perfectam compoſuit, ante omnia nobis erit inquirendum, quamdiu iſte motus ſit duraturus, atque pro iſto motu habebimus ſequentes formulas:

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = -\sin.\omega - \lambda \cos.\omega \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{\lambda a \cos.\omega}{kk},$$

vnde integrando colligitur

$$\frac{ds}{dt} = q - 2gt(\sin.\omega + \lambda \cos.\omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} + \frac{2g\lambda a t \cos.\omega}{kk}.$$

Quare ſi ſtatuamus $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, erit $-\sin.\omega - \lambda \cos.\omega = \frac{\lambda aa \cos.\omega}{kk}$, vnde ſit $\lambda = \frac{-kk}{aa+kk}$ tang. ω, qui valor cum ſit negatiuus, intelligitur, frictionem vim negatiuam exerere debere, vt attritus impediatur, quam vim actu exercebit dummodo fuerit $\lambda < \frac{1}{3}$ h. e., dummodo fuerit tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$; ſicque hic

hic denuo duo caſus perpendendi occurrunt, prouti fuerit

$$\text{tang.}\,\omega < \frac{aa+kk}{3kk} \text{ vel tang.}\,\omega > \frac{aa+kk}{3kk},$$

quos ergo caſus ſeorſim euolui conueniet.

§. 47. *Caſus I.* Sit igitur primo tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, ac revera erit $\lambda = -\frac{kk}{aa+kk}\,\text{tang.}\,\omega$, quo valore ſubſtituto fiet

$$\frac{ds}{dt} = q - \frac{2gaat\,\text{ſin.}\,\omega}{aa+kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{2gat\,\text{ſin.}\,\omega}{aa+kk},$$

vnde cum perpetuo maneat $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, globus prouolutione perfecta progredi perget, neque vllus attritus ſeſe immiſcebit. Spatium autem $KS = s$, quod globus tempore quouis t percurret, erit $s = qt - \frac{gaatt\,\text{ſin.}\,\omega}{aa+kk}$.

§. 48. Poſtquam igitur globus hoc modo ex puncto K exiit, tamdiu ſurſum verſus O progredietur, donec eius celeritas progreſſiua $\frac{ds}{dt}$ penitus euaneſcat, id quod eveniet elapſo tempore $t = \frac{q(aa+kk)}{2gaa\,\text{ſin.}\,\omega}$, quo ergo tempore ſpatium percurſum erit $s = \frac{qq(aa+kk)}{4gaa\,\text{ſin.}\,\omega}$. Quare ſi L fuerit terminus, ad quem globus hoc motu pertingere valeat, erit ſpatium $KL = \frac{qq(aa+kk)}{4gaa\,\text{ſin.}\,\omega}$, tempus vero, quo ex K ad L perueniet erit $\frac{q(aa+kk)}{2gaa\,\text{ſin.}\,\omega}$. Quia autem in L omnem plane motum amiſit, ex hoc puncto iterum per planum inclinatum L K I deſcendere incipiet, lege ea quam ſupra §. 21 et ſeqq. oſtendimus, et quia tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, totus deſcenſus ſubſequens ſine vllo attritu peragetur.

§. 49. Quo igitur iſtum terminum L, quousque globus aſcendendo pertingit, clarius cognoſcamus, perinde

ac tempus, quo ab initio ex I vsque ad L peruenit, loco litterarum p et q valores aſſumtos reſtitui oportet. Cum igitur ſit Tab. II. Fig. 9.

$$q = \frac{aaf \operatorname{coſ.}\omega}{3kk \operatorname{ſin.}\omega + (aa + kk)\operatorname{coſ.}\omega},$$

erit ſpatium

$$KL = \frac{qq(aa + kk)}{4gaa \operatorname{ſin.}\omega} = \frac{aaff(aa + kk)\operatorname{coſ.}\omega^2}{4g \operatorname{ſin.}\omega (3kk \operatorname{ſin.}\omega + (aa + kk)\operatorname{coſ.}\omega^2},$$

cui ſi addatur ſpatium

$$KI = p = \frac{3ffkk(3kk \operatorname{ſin.}\omega + (2aa + kk)\operatorname{coſ.}\omega)}{4g(3kk \operatorname{ſin.}\omega + (aa + kk)\operatorname{coſ.}\omega)^2},$$

reperietur ſpatium

$$IL = \frac{ff(2a \operatorname{coſ.}\omega + 3kk \operatorname{ſin.}\omega)^2}{4g \operatorname{ſin.}\omega (3kk \operatorname{ſin.}\omega + (aa + kk)\operatorname{coſ.}\omega)};$$

vbi notaſſe iuuabit, ſi globus celeritate f ſine vlla frictione ſuper plano inclinato aſcenderet, tum eum ſpatium confecturum eſſe $= \frac{ff}{4g}\operatorname{ſin.}\omega$; vnde patet, ſpatium inuentum IL hoc ſpatio eſſe minus. Denique vero tempus, quo noſter globus ſpatium totum IKL abſoluet, reperietur, ſi ad tempus per IK, quod erat

$$= \frac{3fkk}{2g(3kk \operatorname{ſin.}\omega + (aa + kk)\operatorname{coſ.}\omega)},$$

addatur tempus per KL

$$= \frac{f(aa + kk)\operatorname{coſ.}\omega}{2g \operatorname{ſin.}\omega (3kk \operatorname{ſin.}\omega + (aa + kk)\operatorname{coſ.}\omega},$$

quocirca colligitur tempus per IL $= \frac{f}{2g \operatorname{ſin.}\omega}$; vnde patet, hoc tempus non diſcrepare ab eo, quod globus impendiſſet, ſi libere ſine vlla frictione aſcendiſſet; tum autem eodem tempore ad maiorem pertigiſſet altitudinem.

§. 50. *Caſus II.* Euoluamus nunc etiam alterum caſum, quo tang. $\omega > \frac{aa + kk}{3kk}$, vbi loco λ in noſtris formulis ſcribi oportet $-\frac{1}{3}$, vnde ſequitur

$$\frac{ds}{dt} = q - 2gt\,(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk}:$$

vnde patet fore

$$\frac{ds}{dt} : \frac{ad\Phi}{dt} = q - 2gt\,(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) : q - \frac{2gaat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

tum vero erit

$$\frac{ds}{dt} - \frac{ad\Phi}{dt} = 2gt\left(\frac{(aa+kk)}{3kk}\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega\right),$$

qui valor cum ſit negatiuus, motus globi eandem legem ſequetur, quamdiu fuerit $\frac{ad\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, id quod cum deinceps perpetuo eueniat, globus etiam, poſtquam per K tranſiit, eandem legem in motu ſuo obſeruabit, ita vt elapſo tempore t ambae celeritates futurae ſint

$$\frac{ds}{dt} = q - 2gt\,(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

et tempore t globus conficiet ſpatium

$$KS = s = qt - gtt\,(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega).$$

§. 51. Sit punctum L iterum terminus ad quem globus aſcendendo pertinget, et quia hic eſſe debet $\frac{ds}{dt} = 0$, tempus, quo globus ex K vsque ad L perueniet, erit

$$t = \frac{q}{2g\,(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)},$$

ipſum vero ſpatium erit

$$KL = s = \frac{qq}{4g\,(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)}.$$

Totum ergo tempus, quo globus ex I ad L vsque pertingit, erit

$$+\frac{3fkk}{2g(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}$$

$$+\frac{aaf\,\text{coſ.}\,\omega}{2g(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}$$

$$= \frac{f(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa - kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}{2g(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}.$$

§. 52. Verum vbi globus in L vsque peruenit, ibi quidem celeritas progreſſiua $\frac{ds}{dt}$ fiet nulla, at celeritas gyratoria ipſi adhuc remanebit, quae erit

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{aq\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)}, \text{ ſiue}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a}\cdot\frac{(3kk\,\text{ſin.}\,\omega - (aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}{3kk(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)},$$

quae ergo celeritas adhuc eſt poſitiua, quia

$$3kk\,\text{ſin.}\,\omega > (aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega,$$

ideoque multo magis $\text{ſin.}\,\omega > \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega$. Mox autem cum globus ex L iterum deſcendere inceperit, is amittet hunc motum gyratorium, quod eueniet elapſo tempore $t = \frac{3qkk}{2gaa\,\text{coſ.}\,\omega}$, poſtquam ſcilicet ex K fuerit egreſſus. Quod ſi ergo hinc ſubtrahatur tempus per $KL = \frac{q}{2g(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)}$, remanebit tempus poſtquam globus ex L deſcendere incepit

$$= \frac{3q(3kk\,\text{ſin.}\,\omega - (aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}{2gaa\,\text{coſ.}\,\omega\,(3\,\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega)},$$

quod tempus vtique eſt poſitiuum. Ceterum, quia hic globus ex L cum quadam celeritate gyratoria deſcenſum incipiet, eodem prorſus modo per planum inclinatum deſcendit,

dit, quem ſupra paragrapho 21 et ſeqq. explicauimus. Verum quoniam totus motus globi, poſtquam per punctum K tranſiit, perpetuo ſecundum eandem legem peragitur, etiam totus motus in iisdem formulis, quas modo tradidimus, comprehendetur, ex quibus, cum ſit

$$KS = s = qt - gtt\,(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega),$$

poſito $s = 0$ hinc tempus reperietur, quo globus iterum deſcendendo ad K perueniet, quod erit $= \frac{q}{g\,(\text{ſin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)}$, quod tempus duplo maius eſt eo, quo ex K ad L vsque deſcendendo pertigit, atque hoc modo etiam tempus definiri poterit, quo globus, ex K ſurſum egreſſus, iterum vsque ad principium I pertinget; tantum enim opus erit poni $s = -p$. Ac ſi ad hoc tempus inſuper addatur tempus, quo globus ab I vsque ad K peruenit, habebitur totum tempus, quo poſtquam ex I ſurſum proceſſit, iterum ad I reuertitur.

Exemplum 2.

Tab. II. Fig. 9 §. 53. Ponamus nunc globo in I nullum motum progreſſiuum eſſe impreſſum, ſed ſolum motum gyratorium, ſurſum vergentem cum celeritate data angulari $= \zeta$, ita vt initio, vbi $t = 0$, fuerit $\frac{ds}{dt} = 0$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \zeta$. Quoniam igitur ſtatim ab initio vis frictionis ſurſum tendit, formulae noſtrae erunt

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = -\,\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et}$$
$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{a\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

vnde integrando fit

$$\frac{ds}{dt} = -\,2gt\,(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega) \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

vbi

vbi ex formula priore patet, globum non aſcendere poſſe, niſi ſit ſin. $\omega < \frac{1}{3}$ coſ. ω. Quoniam igitur motum deſcenſus iam ſupra determinauimus, ponamus eſſe ſin. $\omega < \frac{1}{3}$ coſ. ω, ſeu tang. $\omega < \frac{1}{3}$, vt globus ſaltem ſurſum moueri incipiat; tum igitur ipſo initio fuerit $\frac{a\,d\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, et videamus, quamdiu iſta conditio locum ſit habitura: tamdiu enim etiam motus ſecundum has formulas peragetur. Hunc in finem ſtatuamus $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$ hoc eſt

$$2gt\left(\tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega\right) = \zeta a - \frac{2gaat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

vnde colligimus

$$t = \frac{3\zeta akk}{2g((aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)},$$

quod ergo tempus erit poſitiuum, dummodo fuerit

$$\text{tang.}\,\omega < \frac{aa+kk}{3kk},$$

quare cum per hypotheſin ſit tang. $\omega < \frac{1}{3}$, iſta conditio ſemper adimplebitur, vnde motus ab initio eandem legem ſequetur, vsque ad tempus

$$t = \frac{3\zeta akk}{2g((aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)},$$

elapſo autem hoc tempore fiet

$$\frac{ds}{dt} = + \frac{\zeta akk(\text{coſ.}\,\omega - 3\,\text{ſin.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega} = \frac{a\,d\Phi}{dt},$$

ſpatium vero interea aſcendendo confectum erit

$$gtt\left(\tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega\right) = \frac{9\zeta\zeta aak^4\left(\tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega\right)}{4g((aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)^2}.$$

§. 54. Statuamus vt ſupra, hoc tempore

$$t = \frac{3\zeta akk}{2g((aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega}$$

globum aſcendendo perueniſſe vsque in K, ac ponamus bre-

 vitatis

vitatis gratia hoc ſpatium I K $= p$, celeritates vero quas globus hic habebit, ſint

$$\frac{ds}{dt} = q \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a}, \text{ ita vt ſit}$$

$$p = \frac{3\zeta\zeta aak^4(\text{coſ.}\,\omega - 3\,\text{ſin.}\,\omega)}{4g((aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega)^2} \text{ et}$$

$$q = \frac{\zeta akk(\text{coſ.}\,\omega - 3\,\text{ſin.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega - 3kk\,\text{ſin.}\,\omega},$$

et quia ab hoc termino t vlterius progrediendo nullus datur attritus, motus ſequetur has formulas:

$$\frac{dds}{2gdt^2} = \lambda\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega \text{ et } \frac{dd\Phi}{2gdt^2} = -\frac{\lambda a\,\text{coſ.}\,\omega}{kk},$$

hincque integrando erit

$$\frac{ds}{dt} = q + 2gt(\lambda\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{2g\lambda at\,\text{coſ.}\,\omega}{kk}.$$

Nunc igitur fiat $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, vt videamus quamdiu prouolutio perfecta ſit duratura, eritque hinc

$$\lambda\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega = -\frac{\lambda aa\,\text{coſ.}\,\omega}{kk}, \text{ vnde colligitur}$$

$$\lambda = \frac{kk}{aa+kk}\,\text{tang.}\,\omega,$$

qui valor ob tang. $\omega < \frac{1}{3}$ multo magis ſemper erit $< \frac{1}{3}$, ideoque prouolutio perfecta, poſtquam globus ad K pertigerit, perpetuo durabit, eritque propterea

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt} = q - \frac{2gaat\,\text{ſin.}\,\omega}{aa+kk},$$

haec autem celeritas euaneſcet, quod fiat in L, elapſo tempore $t = \frac{q(aa+kk)}{2gaa\,\text{ſin.}\,\omega}$, ipſum vero ſpatium percurſum erit $KL = \frac{qq(aa+kk)}{4gaa\,\text{ſin.}\,\omega}$. Omnia ſcilicet perinde ſe habebunt atque in caſu praecedente, hoc tantum diſcrimine, quod hic litterae p et q per ζ definiantur cum ante per f eſſent definitae.

§. 55.

§. 55. Hinc igitur facile obtinebimus tempus, quo globus ab I per K vsque ad L peruenit, quippe quod, ſi loco q valorem aſſumtum reſtituamus, reperietur

$$= \frac{3\zeta akk}{2g((aa+kk)\,\mathrm{coſ.}\,\omega - 3kk\,\mathrm{ſin.}\,\omega)} + \frac{\zeta kk(aa+kk)(\mathrm{coſ.}\,\omega - 3\,\mathrm{ſin.}\,\omega)}{2ga\,\mathrm{ſin.}\,\omega((aa+kk)\,\mathrm{coſ.}\,\omega - 3kk\,\mathrm{ſin.}\,\omega)}$$

hoc eſt $= \frac{\zeta kk}{2ag\,\mathrm{ſin.}\,\omega}$.

Sicque globus eodem tempore omnem motum amittet, quo, ſi nulla fuiſſet frictio, motum amiſſurus fuiſſet; praeterea vero totum ſpatium prodit

$$\mathrm{IL} = \frac{3\zeta\zeta aak^4(\mathrm{coſ.}\,\omega - 3\,\mathrm{ſin.}\,\omega)}{4g((aa+kk)\,\mathrm{coſ.}\,\omega - 3kk\,\mathrm{ſin.}\,\omega)^2} + \frac{\zeta\zeta k^4(aa+kk)(\mathrm{coſ.}\,\omega - 3\,\mathrm{ſin.}\,\omega)^2}{4g\,\mathrm{ſin.}\,\omega((aa+kk)\,\mathrm{coſ.}\,\omega - 3kk(\mathrm{ſin.}\,\omega)^2}$$

ſiue

$$\mathrm{IL} = \frac{\zeta\zeta k^4(\mathrm{coſ.}\,\omega - 3\,\mathrm{ſin.}\,\omega)}{4g\,\mathrm{ſin.}\,\omega((aa+kk)\,\mathrm{coſ.}\,\omega - 3kk\,\mathrm{ſin.}\,\omega)}.$$

§. 56. In his igitur caſibus id imprimis notatu dignum occurrit, quod totus motus non ſecundum eandem legem abſoluatur, ſed duabus quaſi partibus conſtet, quarum indoles per diuerſas formulas analyticas exprimatur, ita vt principium continuitatis, quod alias in omnibus naturae phaenomenis ſtrictiſſime obſeruatur, hic nullum locum inueniat; atque haec eſt cauſſa, cur iſta phaenomena, quae in motu globorum ob frictionem producuntur, fuſius et adcuratius euoluenda ſim arbitratus, ne memorato illi principio continuitatis, quod a Philoſophis tantopere propugnari ſolet, nimium tribuatur quam par eſt. Ceterum hic etiam conſtitueram eiusmodi globorum motum expendere, quorum centrum grauitatis non in ipſum centrum figurae cadit. Verum quia praeſens tractatio iam nimium increuit, hoc argumentum in aliam occaſionem reſeruabo.

APPLI-

APPLICATIO TENTAMINIS DE SONO CAMPANARVM AVCTORE L. EVLERO NOVOR. COMMENTAR. TOMO X INSERTI AD SONOS SCYPHORVM VITREORVM, QVI SVB NOMINE INSTRVMENTI HARMONICI SVNT COGNITI.

Auctore

M. GOLOVIN.

§. 1.

Quamuis theoria non ſolum de motu laminarum elaſticarum, ſed etiam de earum Sono tam dilucide a ſummo *Eulero*, aliisque celeberrimis Geometris eſt pertractata, vt prorſus exhauſta videatur; attamen hanc materiam perſcrutanti caſus quidam particularis ſe mihi obtulit, qui, quantum mihi notum eſt, a nemine adhucdum tractatus reperitur; nempe vt oſtendatur ratio, cur inſtrumenta ex ſcyphis vitreis compoſita, et ſub nomine harmonicorum cognita ſuaves ad inſtar chordarum Muſicarum edant ſonos. Quare non

non ingratum fore, arbitror, ſi hoc argumentum accurate hic perſcrutemur.

§. 2. Antequam autem propoſitum adgrediamur, eruamus aequationem pro motu laminarum elaſticarum in circulum incuruatarum, ſed quoniam hoc argumentum iam a ſummo *Eulero* in diſſertatione Tomo X. Nouor. Commentar. inſerta tractatum reperitur, principia, ex quibus celeber. ille Auctor aequationem iſtam deriuauit, hic ſuppono cognita. Quare poſitis abſciſſa per arcum circularem expreſſa $= x$, applicata $= y$, et tempore, quo lamina oſcillationes ſuas quam minimas peragit, $= t$, nanciſcemur tandem ſequentem aequationem motum laminis pro quouis tempore determinantem:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{2gEcc}{\delta}\left(\frac{1}{aa}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)\right),$$

vbi c denotat latitudinem annuli propoſiti, a radium medium inter circulum interiorem et exteriorem, δ denſitarem elementorum, ex quibus conſtat annulus propoſitus, E vim quampiam, per quadratum lineae cuiusdam diuiſam, et ab elaſticitate pendentem, et denique g altitudinem, ex qua grauia vno minuto ſecundo delabuntur.

§. 3. Vt nunc hanc aequationem generalem ad inſtitutum noſtrum accommodemus, ponamus primo laminam noſtram elaſticam in circulum incuruatam a nullis viribus elementaribus ſollicitari; quare formulam $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, quae a viribus memoratis originem ſuam trahit, prorſus ex calculo eiicere poſſumus, ita vt aequatio generalis hanc in-

induet formam $(\frac{ddy}{dt^2}) = -\frac{2gEcc}{\delta}(\frac{d^4y}{dx^4})$. Secundo laminam noſtram elaſticam ex eadem materia eſſe confectam aſſumendo, ponamus $\frac{E}{\delta}$ eſſe quantitatem conſtantem $= C$ ita vt haec littera C elaſticitatem denotet inuariabilem. Quibus poſitis nanciſcemur hanc ad inſtitutum noſtrum accommodatam aequationem $\frac{1}{2g}(\frac{ddy}{dt^2}) = -Ccc(\frac{d^4y}{dx^4})$ quae pro quouis tempore oſcillationes quam minimas, quas lamina edere poteſt, oſtendere debet.

§. 4. Totum ergo negotium nunc eo redit, vt iſta aequatio quarti gradus integrationem completam admittat, quod cum ob defectum Analyſeos nullo modo adhuc praeſtari queat, in eos tantum caſus inquiramus, quibus lamina noſtra motum tremulum regularem, perinde ac pendulum ſimplex, recipere poteſt, ponamus ergo motum laminae ita eſſe comparatum, vt cum motu penduli ſimplicis, cuius longitudo $= l$, conueniat, id quod eueniet, ponendo vim acceleratricem

$$\frac{1}{2g}(\frac{ddy}{dt^2}) = -\frac{y}{l} \text{ ſiue } (\frac{ddy}{dt^2}) = -\frac{2gy}{l}.$$

§. 5. Ad hanc aequationem integrandam tollamus primo clauſulas, quia x in aequatione non ineſt, ideoque vt conſtans ſpectari poteſt, deinde poſito breuitatis gratia $\frac{2g}{l} = \beta$ et vtrinque multiplicato per dt^2 habebimus hanc aequationem $ddy = -\beta y dt^2$ quae ducta in $2dy$ et integrata dat

$$dy^2 = -\beta yy dt^2 + \beta ff dt^2 \text{ ideoque}$$

$$dy = dt\sqrt{\beta(ff-yy)}$$

vnde elicitur $dt\sqrt{\beta} = \frac{dy}{\sqrt{(ff-yy)}}$ quae aequatio integrata

dat

dat $t\sqrt{\beta}+\alpha =$ Ar. ſin. $\frac{y}{f}$ vnde viciſſim concluditur

$$\frac{y}{f} = \text{ſin.} (\alpha + t\sqrt{\beta}).$$

Nunc loco β ſubſtituto $\frac{2g}{l}$ et per f multiplicato nanciſcemur tandem hoc integrale particulare noſtrae aequationis $y = f \,\text{ſin.} (\alpha + t\sqrt{\frac{2g}{l}})$ vbi f et α ſunt duae conſtantes arbitrariae per duplicem integrationem in calculum ingresſae; quoniam vero hic littera x pro conſtanti eſt habita, duae conſtantes arbitrariae f et α vt functiones ipſius x ſpectari poſſunt.

§ 6. Quoniam igitur poſuimus $\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{y}{l}$ erit etiam $Ccc\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right) = \frac{y}{l}$ in qua aequatione cum tempus t non inſit, ideoque vt conſtans ſpectari poteſt, quare ſublatis, vt ſupra, clauſulis, et poſito breuitatis gratia $Ccl = h^4$ habebimus hanc aequationem integrandam $y = \frac{h^4 d^4 y}{dx^4}$ quae eodem laborat incommodo, quo prima, motum noſtrae laminae in genere determinans, hoc eſt, ob defectum Analyſeos integrationem non admittat, quare integralia particularia huic aequationi ſatisfacientia inueſtigare oportet, atque primo patet intuitu, hoc fieri ponendo $y = e^{\alpha x}$; tum enim poſito $le = 1$ erit

$$\frac{dy}{dx} = \alpha e^{\alpha x}; \quad \frac{ddy}{dx^2} = \alpha\alpha e^{\alpha x}; \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \alpha^3 e^{\alpha x}; \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \alpha^4 e^{\alpha x}.$$

Quibus valoribus ſubſtitutis fit $1 = h^4 \alpha^4$ vnde colligimus $\alpha^4 = \frac{1}{h^4}$. Sicque quatuor valores ad inſtitutum noſtrum neceſſarii erunt ſequentes

$$\alpha = \frac{1}{h}; \quad \alpha = -\frac{1}{h}; \quad \alpha = \frac{\sqrt{-1}}{h} \text{ et } \alpha = -\frac{\sqrt{-1}}{h};$$

conſequenter habebimus hos quatuor pro y valores ſpeciales:

$$\text{I. } y = e^{\frac{x}{b}}; \quad \text{II. } y = e^{\frac{-x}{b}}; \quad \text{III. } y = e^{\frac{x\sqrt{-1}}{b}};$$

et denique IV. $y = e^{\frac{-x\sqrt{-1}}{b}}$.

§, 7. Vt nunc binos valores exponentiales imaginarios pro y inuentos ex calculo eiiciamus, animaduertendum eſt, illos ad ſinum et coſinum anguli $\frac{x}{b}$ reduci poſſe; nam ſi ponamus $y = \text{ſin.}\frac{x}{b}$ erit

$$\frac{dy}{db} = \frac{1}{b}\text{coſ.}\frac{x}{b}; \quad \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{1}{b^2}\text{ſin.}\frac{x}{b};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{1}{b^3}\text{coſ.}\frac{x}{b}; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{b^4}\text{ſin.}\frac{x}{b}.$$

Eodem modo poſito $y = \text{coſ.}\frac{x}{b}$ habebimus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{b}\text{ſin.}\frac{x}{b}; \quad \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{1}{b^2}\text{coſ.}\frac{x}{b};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{b^3}\text{ſin.}\frac{x}{b}; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{b^4}\text{coſ.}\frac{x}{b};$$

vnde pro y quatuor ſequentes nanciſcemur valores reales:

$$\text{I. } y = e^{\frac{x}{b}}; \quad \text{II. } y = e^{\frac{-x}{b}};$$

$$\text{III. } y = \text{ſin.}\frac{x}{b} \text{ et IV. } y = \text{coſ.}\frac{x}{b}.$$

§. 8. Inuentis quatuor pro y valoribus realibus inſpiciamus ipſam aequationem ſupra allatam $y = \frac{b^4 d^4 y}{dx^4}$; et cum in ea y vnicam tantum habet dimenſionem, valores pro y acquiſitos quomodocunque inter ſe combinari poſſe, nemo ibit inficias; quam ob rem ſequens integrale aequationis propoſitae prodire aſſumamus:

$$y = \text{A}\,e^{\frac{x}{b}} + \text{B}\,e^{\frac{-x}{b}} + \text{D ſin.}\frac{x}{b} + \text{E coſ.}\frac{x}{b},$$

qui

qui valor vtique eſt completus, quia A, B, D, E ſunt quatuor conſtantes arbitrariae per integrationem in calculum ingreſſae.

§. 9. Quoniam in integratione aequationis $y = \frac{b^4 d^4 y}{d x^4}$, tempus t vt conſtans eſt aſſumptum, totam formulam integralem inſuper per functionem temporis quamcunque, quae ſit $=$ G multiplicare poſſumus, quare duo valores pro y inuenti hanc induent formam:

$$y = F \text{ ſin. } (\alpha + t \sqrt{\tfrac{2g}{l}}) \text{ et}$$

$$y = G (A e^{\frac{x}{b}} + B e^{\frac{-x}{b}} + D \text{ ſin. } \tfrac{x}{b} + E \text{ coſ. } \tfrac{x}{b})$$

quos inter ſe identicos reddi oportet; quod vtique fieri poteſt, quandoquidem F exhibet functionem ipſius x et G functionem ipſius t; vnde nanciſcemur hanc aequationem finalem:

$$y = (\text{ſin. } (\alpha + t \sqrt{\tfrac{2g}{l}})) (A e^{\frac{x}{b}} + B e^{\frac{-x}{b}} + D \text{ ſin. } \tfrac{x}{b} + E \text{ coſ. } \tfrac{x}{b}),$$

vbi conſtantes A, B, D, E ex ſtatu laminae definire oportet.

§. 10. Antequam vlterius progrediamur, probe eſt tenendum, hic eas tantum ſolutiones locum habere poſſe, quae pro y valores quam minimos exhibent, ideoque eas, quae limites praeſcriptos ſuperant, merito ex calculo eiici poſſumus. Hoc praemiſſo, vt naturam noſtrae laminae propius cognoſcamus, ſumamus punctum A, vbi ſit $y = 0$, ita vt hic etiam ſit $x = 0$. Quo facto ſtatim habebimus $0 = A + B + E$. Iam quia peripheria circuli eſt $= 2 \pi a$, neceſſe eſt iterum fieri debere $y = 0$,

 ſi

ſi ponamus $x = 2\pi a$; $x = 4\pi a$; $x = 6\pi a$; etc. Ex his patet, terminum $A e^{\frac{x}{b}}$ neceſſario eſſe debere $= 0$, quia aliter mox in immenſum creſceret; quod vero ad ſecundum terminum $B e^{\frac{-x}{b}}$ attinet, ille mox tam fiet paruus, vt pro nihilo haberi poſſit, vnde dilucide intelligitur, eum etiam primo initio abeſſe debere, ita vt ſit $B = 0$, quamobrem etiam $E = 0$, conſequenter hanc pro noſtra lamina determinatam habebimus aequationem:

$$y = D\,(\text{ſin.}\,\alpha + t\sqrt{\tfrac{2g}{l}})\ \text{ſin.}\,\tfrac{x}{b},$$

vbi littera D per hypotheſin coëfficientem quaſi infinite paruum ſignificare debet.

§. 11. Quoniam ſupra §. 4. aſſumſimus, laminam noſtram in circulum incuruatam, motum ſuum regularem peragere pendulo ſimplici, cuius longitudo $= l$, iſochronum, quare nunc determinanda eſt longitudo huius penduli. Hunc in finem ponamus $x = 2\pi a$; fierique debet $\text{ſin.}\,\frac{2\pi a}{b} = 0$, quod euenit ſumendo $b = 2a$, tum vero etiam omnes ſequentes valores pro x aſſumpti, veluti $x = 3\pi a$; $x = 4\pi a$; etc. euaneſcunt; ideoque $b = 2a$. Quoniam vero ſupra §. 6. poſuimus $Ccc\,l = b^4$ ſiue $C\,l = b^4$ poſito $cc = 1$ ob $b = 2a$ erit longitudo penduli ſimplicis quaeſita $l = \frac{16\,a^4}{C}$. Verum quia $\text{ſin.}\,\frac{2\pi a}{b}$ etiam euaneſcet, ſumendo $b = a$, tum vero etiam $b = \frac{2}{3}a$; $b = \frac{1}{2}a$; $b = \frac{2}{5}a$; etc. et in genere $b = \frac{2a}{i}$, vnde infinitos pro pendulo ſimplici l nanciſcemur valores ſequentes: $l = \frac{16\,a^4}{C\,i^4}$. Eſt vero tempus vnius oſcillationis $= \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$, hinc numerus oſcillationum vno minuto ſecundo

do editarum $= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}}$, qui eſt menſura ſoni; quem noſtra lamina edere poteſt, quare cum inuenerimus $l = \frac{18a^4}{C\,i^4}$, nanciſcemur ſonos: $= \frac{i^2\sqrt{2gC}}{4\pi aa}$. Vnde patet pro laminis elaſticis in circulum incuruatis ex eadem materia confectis ſonos eſſe in ratione inuerſa, vt quadratum radii annulia.

§. 12. Ponamus nunc loco i varios valores, veluti 0, 1, 2, 3, etc. tunc ſoni diuerſi, quos noſtra lamina edere poteſt, ſecundum hos numeros progredientur:

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, etc.

Vbi ſonus 0 ſtatui quietis reſpondet, ſecundus vero ſonus 1 denotat ſonum principalem prae reliquis eminentem, qui cum ſono in Muſica charactere C deſignato conuenit, ita vt omnes ſoni, quos haec lamina edere poteſt, erunt ſequentes:

C; $\bar{c}$; $\bar{\bar{d}}$; $\bar{\bar{\bar{c}}}$; $\bar{\bar{\bar{gis}}}$; $\bar{\bar{\bar{d}}}$; etc.

1. 4. 9. 16. 25. 36.

§. 13. Vt nunc videamus, an hi ſoni ad Muſicam ſint accommodati, inquiramus in ſonos ipſos a chordis Muſicis editos. Si enim ſonus Muſicae principalis charactere C deſignatus fuerit $= 1$, tunc omnes ſoni, qui edi poſſunt, ſecundum hos numeros progredientur: 1, 2, 3, 4, etc. quibus ſequentes reſpondent ſoni muſici:

C, F, c, f, a, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{a}$, $\bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{e}}$, etc.

§. 13. Si nunc ſonos a noſtra lamina elaſtica in circulum incuruata, et a chordis Muſicis editos inter ſe com-

compararemus, ſtatim videbimus, etiam huiusmodi corpora maxime eſſe idonea ad ſonos puros et harmonicos edendos, eosque eatenus praeſtare chordis ordinariis, quatenus in chordis multo plures ſoni ſe ſubaudiendos offerunt. Nam hic praeter ſonum principalem C potiſſimum ſonus $\bar{c}$, hoc eſt, eius dupla octaua, ſubauditur, quo harmonia tanto euadit ſuauior. Sequens vero ſonus $\bar{\bar{d}}$ iam nimis erit debilis, quam vt audiri poſſit; ſed ſi noſtra lamina adhuc etiam ſonum illum $\bar{\bar{d}}$ ſubaudiendum ſe offerret, eundem quoque chordae exhibent, ideoque inter laminas in circulum incuruatas et chordas muſicas hoc reſpectu nullum diſcrimen inueniri poteſt.

§. 14. Ex his praemiſſis ratio delucide patet, cur inſtrumenta nuper inuenta ex ſcyphis vitreis compoſita, et ſub nomine harmonicorum cognita tam ſuaues edant ſonos, ita vt a Muſicis aliis inſtrumentis anteferenda videntur; nam inter laminam noſtram in circulum incurvatam et chordam Muſicam nullum aliud diſcrimen, vti apparet, reperitur, quam vt chordae multo plures edant ſonos, quam laminae hic tractatae.

MEDI-

MEDITATIONES DE FORMVLA QVA MOTVS LAMINARVM ELASTICARVM IN ANNVLOS CIRCVLARES INCVRVATARVM, EXPRIMITVR.

Auctore
A. J. LEXELL.

§. 1.

Cum non ita pridem in conuentu Academico de formula quadam propoſita pro motu vibratorio laminarum elaſticarum in annulos circulares incuruatarum agebatur, mihique dubia quaedam ſuboriebantur, vtrum iſta formula rite ſibi conſtaret, inde occaſionem arreptus hanc quaeſtionem accuratiori examini ſubiicere conſtitui, idque eo potiori iure, quod poſtmodum inueniſſem iſtam formulam propoſitam ſumma auctoritate Illuſtris *Euleri* niti. (Videatur Pars I. Actorum Academiae pro Anno 1779. pag. 158). Praeter opinionem autem accidit, vt ad concluſio-

cluſionem ab illa *Euleriana* prorſus diuerſam me calculus perduceret, quemadmodum ex ſpecimine huius calculi heic proponendo apparebit, quod ea qua par eſt modeſtia Geometrarum accuratiori examini lubens ſubiicio, quo ſcilicet occaſio ipſis ſubminiſtretur hanc doctrinam, quae nondum ſatis exculta videtur, vlterius amplificandi et perficiendi.

§. 2. Ne autem hoc in negotio ſuperfluam ſuſcipiam operam, disquiſitionem meam ex iſtis adornare inſtitui formulis generalibus, quas ſummus *Eulerus* in Nov.
Tab. II. Fig. 1. Commentarior. Academiae Petropolit. Tomo XV, XIX et XX, pro aequilibrio et motu laminarum elaſticarum tradidit. Sit igitur filum elaſticum A M B, in figuram curuilineam A M B incuruatum, vbi quidem facilitatis gratia ſupponimus hanc curuam in eodem plano eſſe ſitam, huius autem curuae coordinatae pro puncto M ſint $A X = x$, $M X = y$, tumque elementum curuae $M m$ exprimatur per $d s$, angulus vero quem curua ad punctum M cum ordinata M X efficit, ſiue A M X, deſignetur per ϕ. Vt nunc huius curuae portio M B figuram ſuam inuariabilem conſeruet, etiamſi iſta portio A M fuerit reſecta, patet id fieri poſſe, ſi portioni M B in directione tangentis iuncta ſupponatur virga rigida M T, cui eiusmodi vires ſint applicatae, quae in aequilibrio conſiſtant cum illis quibus portio B M afficitur. Iam igitur ſi vis ſecundum directionem tangentis agens dicatur T, vis autem directioni tangentis normalis ſit $V P = V$ et diſtantia a puncto contactus M, ad quam haec vis ſit applicata, $V M = v$, erit omnino momentum potentiae inde oriundae pro puncto $M = V v$, patetque ſimul hoc momen-

tum eſſe proportionale elaſticitati fili in puncto M, ideoque proportionale incuruationi eiusdem fili, vnde colligitur iſta aequatio $V v = G . \frac{d \Phi}{d s}$, denotante G functionem quandam ipſius s. Probe autem obſeruandum eſt hanc formulam eatenus tantum valere, quatenus filum in ſtatu initiali in directum ſupponitur extenſum, verum ſi fili radius curuaturae ad punctum M fuerit pro ſtatu naturali $\frac{1}{r}$, tum habebitur $V v = G \left(\frac{d \Phi}{d s} - \frac{1}{r} \right)$. Iam ſi elemento fili $M m$ ſecundum directiones fixas coordinatarum A X, X M applicatae fuerint vires elementares $P\, d s$, $Q\, d s$, pro motu fili hae exorientur aequationes:

$$\text{I. } \left(\frac{d T}{d s}\right) + V \left(\frac{d \Phi}{d s}\right) = \left(\frac{S}{2 g} \left(\frac{d d x}{d t^2}\right) - P\right) \text{ſin.} \Phi + \left(\frac{S}{2 g} \left(\frac{d d y}{d t^2}\right) - Q\right) \text{coſ.} \Phi ;$$

$$\text{II. } \left(\frac{d V}{d s}\right) - T \left(\frac{d \Phi}{d s}\right) = \left(\frac{S}{2 g} \left(\frac{d d y}{d t^2}\right) - Q\right) \text{ſin.} \Phi - \left(\frac{S}{2 g} \left(\frac{d d x}{d t^2}\right) - P\right) \text{coſ.} \Phi ;$$

quibus iſtae adiungi debent

$$V v = G \left(\left(\frac{d \Phi}{d s}\right) - \frac{1}{r} \right) \text{ et } \left(\frac{d . V v}{d s}\right) = V ;$$

vbi quidem maſſa elementi $M m$ exprimitur per $S\, d s$, $d t$ autem ſignificat elementum temporis, et g altitudinem lapſus uno minuto ſecundo, dum t in huiusmodi partibus ſupponitur expreſſum. Conueniunt autem aequationes modo allatae omnino cum illis, quas propoſuit Illuſtr. *Eulerus* Tomo XV. Nou. Comment. pag. 410, niſi quod loco + P, + Q ab ipſo adhibitorum, nos adhibuerimus − P, − Q, tumque quod apud *Eulerum* per Σ exprimebatur, hic per S deſignetur, id vero quod illic Illuſtri *Eulero* S ſignificabat, nunc per G exprimatur, quibus alterationibus introductis formulae noſtrae conſentientes redduntur cum illis, quas Illuſtris *Eulerus* propoſuit Tomo XIX. Nouor. Commentar.

§. 3.

§. 3. Si aequatio I. multiplicetur per coſ. Φ et II. per ſin. Φ, tumque iſta fiat combinatio: I. coſ. Φ + II. ſin. Φ, colligitur inde:

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)\text{coſ.}\Phi - T\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\text{ſin.}\Phi + \left(\frac{dV}{ds}\right)\text{ſin}\,\Phi + V\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\text{coſ.}\Phi = \frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - Q;$$

ſimilique modo ſi iſta fiat combinatio: I. ſin. Φ − II. coſ. Φ, habebimus:

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)\text{ſin.}\Phi + T\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\text{coſ.}\Phi - \left(\frac{dV}{ds}\right)\text{coſ.}\Phi + V\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\text{ſin.}\Phi = \frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) - P.$$

Prior aequatio integrata dat:

$$T\,\text{coſ.}\,\omega + V\,\text{ſin.}\,\Phi = \int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - Q\right);$$

et poſterior

$$T\,\text{ſin.}\,\Phi - V\,\text{coſ.}\,\Phi = \int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) - P\right);$$

ex quibus aequationibus nunc facile colligitur:

$$T = \text{coſ.}\Phi\int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - Q\right) + \text{ſin.}\Phi\int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) - P\right)$$
$$= \left(\frac{dy}{ds}\right)\int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - Q\right) + \left(\frac{dx}{ds}\right)\int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) - P\right);$$

ob coſ. $\Phi = \left(\frac{dy}{ds}\right)$ et ſin. $\Phi = \left(\frac{dx}{ds}\right)$. Similique ratione fit

$$V = \text{ſin.}\Phi\int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - Q\right) - \text{coſ.}\Phi\int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) - P\right);$$

hinc

$$V\,ds = ds\left(\frac{d.Vv}{ds}\right) = ds.\,\text{ſin.}\,\Phi\int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - Q\right)$$
$$- ds\,\text{coſ.}\Phi\int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) - P\right) = dx\int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - Q\right)$$
$$- dx\int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - P\right);$$

at integrando:

$$V\,v = \int dx\int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - Q\right) - \int dy\int ds\left(\frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) - P\right);$$

quae formulae omnino conueniunt cum illis ab Illuſtr. *Eulero* Tom. XIX. Nou. Commentar. propoſitis:

$$T = -\left(\frac{dx}{ds}\right)\int P'ds - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q'ds \text{ et } G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \int dy\int P'ds - \int dx\int Q'ds;$$

exiſtente

exiſtente

$$P' = P - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right);$$

$$Q' = Q - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right),$$

tumque $G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = V v$, ſi filum in ſtatu naturali in directum fuerit extenſum.

§. 4. Quamuis vero nunc, pro motu laminarum elaſticarum indagando, in vſum vocare liceat has formulas:

$$T = -\left(\frac{dx}{ds}\right)\int P' ds - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q' ds \text{ et}$$

$$G\left(\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \frac{1}{r}\right) = \int dy\, P' ds - \int dx \int Q' ds;$$

meo tamen iudicio multo conuenientius videtur, ad ipſas formulas differentiales mox ab initio propoſitas recurrere; quippe quum, ſimul ac valor quantitatis T fuerit definitus, aequatio pro motu fili elaſtici ſtatim habeatur ex aequatione II. A caſu igitur ſimpliciſſimo vt ordiamur, ponamus filum elaſticum in ſtatu naturali in lineam rectam fuiſſe extenſum, et elaſticitatem per totum hoc filum vbique eſſe aequabilem, ita vt G aequetur quantitati conſtanti. Deinde ponamus quoque vires elementares euaneſcentes, ita vt ſit

$$P' = -\frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) \text{ et } Q' = -\frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right),$$

exiſtente etiam S quantitate conſtante, vbi quidem ſi filum nullam habuerit craſſitiem, nihil impedit quo minus ſtatui poſſit $S = 1$, hinc igitur erunt aequationes noſtrae I. II:

$$\text{I. } \left(\frac{dT}{ds}\right) + V\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\text{ſin.}\,\Phi + \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\text{coſ.}\,\Phi;$$

$$\text{II. } \left(\frac{dV}{ds}\right) - T\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\text{ſin.}\,\Phi - \frac{1}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\text{coſ.}\,\Phi;$$

 Iam

Iam ſi de motibus vibratoriis quam minimis quaeratur, pro quibus ordinata M X prae abſciſſa A X quaſi euaneſcit, atque adeo ipſe arcus A M abſciſſae A X proxime eſt aequalis, angulus autem A M X non niſi minima quantitate ab angulo recto differt, ſtatui poteſt coſ. $\Phi = 0$; ſin. $\Phi = 1$ et $(\frac{ddx}{dt^2}) = 0$; hincque aequationes noſtrae in iſtas transformabuntur:

$$(\frac{dT}{ds}) + V(\frac{d\Phi}{ds}) = 0;$$
$$(\frac{dV}{ds}) - T(\frac{d\Phi}{ds}) = \frac{1}{2g}(\frac{ddy}{dt^2}).$$

Quia vero eſt $Vv = G(\frac{d\Phi}{ds})$, fiet

$$V\,ds = ds\,(\frac{d.Vv}{ds}) = G\,ds\,(\frac{dd\Phi}{ds^2}),$$

hincque

$$\int V\,ds\,(\frac{d\Phi}{ds}) = \frac{1}{2}G(\frac{d\Phi}{ds})^2; \text{ ideoque}$$
$$\int ds\,(\frac{dT}{ds}) + \int V\,ds\,(\frac{d\Phi}{ds}) = T + \frac{1}{2}G(\frac{d\Phi}{ds})^2 = A;$$

ſiue $T = A - \frac{1}{2}G(\frac{d\Phi}{ds})^2$; hoc igitur valore ipſius T in aequatione II. ſubſtituto, conſequimur:

$$(\frac{dV}{ds}) + \frac{1}{2}G(\frac{d\Phi}{ds})^3 - A(\frac{d\Phi}{ds}) = \frac{1}{2g}(\frac{ddy}{dt^2}); \text{ ſiue}$$
$$G(\frac{d^3\Phi}{ds^3}) + \frac{1}{2}G(\frac{d\Phi}{ds})^3 - A(\frac{d\Phi}{ds}) = \frac{1}{2g}(\frac{ddy}{dt^2}); \text{ ob}$$
$$(\frac{dV}{ds}) = (\frac{dd.Vv}{ds^2}) = G(\frac{d^3\Phi}{ds^3}).$$

Et iſta aequatione motus fili elaſtici nunc exprimitur. Si pro puncto M radius curuaturae ſit R, habebimus $\frac{1}{R} = (\frac{d\Phi}{ds})$, et quum in genere ſit $\frac{1}{R} = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^3}$, ſi ponatur elementum curuae ds conſtans, ita vt ſit $dx\,ddx = -dy\,ddy$, fiet omnino:

$$\frac{1}{R} = -\frac{ddy}{ds\,dx} = -(\frac{ds}{dx})(\frac{ddy}{ds^2}) = -\frac{1}{\text{ſin.}\Phi}(\frac{ddy}{ds^2}).$$

Hinc

Hinc vero ob $\left(\frac{d\,\Phi}{d\,s}\right) = -\frac{1}{ſin.\,\Phi}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right)$, colligitur

$$\left(\frac{d\,d\,\Phi}{d\,s^2}\right) = -\frac{1}{ſin.\,\Phi}\left(\frac{d^3\,y}{d\,s^3}\right) + \left(\frac{d\,\Phi}{d\,s}\right)\frac{coſ.\,\Phi}{ſin.\,\Phi}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{ſin.\,\Phi}\left(\frac{d^3\,y}{d\,s^3}\right) - \frac{coſ.\,\Phi}{ſin.\,\Phi^3}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right)^2 = -\frac{1}{ſin.\,\Phi}\left(\frac{d^3\,y}{d\,s^3}\right);$$

quia terminus poſterior prae priori eſt quam minimus. Inde vero denuo differentiando colligitur:

$$\left(\frac{d^3\,\Phi}{d\,s^3}\right) = -\left(\frac{d^4\,y}{d\,s^4}\right) - \left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right)^3,$$

poſito nimirum heic ſin. $\Phi = 1$ et coſ. $\Phi = 0$. Hinc igitur nunc iſta elicitur aequatio:

$$G\left(-\left(\frac{d^4\,y}{d\,s^4}\right) - \tfrac{3}{2}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right)^3\right) - A\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right);$$

heic autem, quia curua A M parum a linea recta differt, $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right)^3$ prae $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right)$ euaneſcere eſt intelligendum, fiet igitur:

$$G\left(\frac{d^4\,y}{d\,s^4}\right) + A\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right) = -\frac{1}{2g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right);$$

hinc ſi pro ſtatu initiali tenſio euaneſcat, quo caſu $T = A = 0$, omnino iſta prodit aequatio:

$$G\left(\frac{d^4\,y}{d\,s^4}\right) = -\frac{1}{2g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right).$$

§. 5. Nunc iſtum contemplemur caſum, quo filum in Tab. II.
ſtatu naturali in circulum A N n incuruatum eſt, centro huius Fig. 2.
circuli in O exiſtente et poſito radio iſtius circuli N O $= a$. Si ex punctis M, m ductae intelligantur ad centrum rectae M O, m O, quae circulo in punctis N, n occurrant, tumque dicatur recta M O $= z$ et angulus M O X $= \psi$, his poſitis fiet A X $= x = b + z$ coſ. ψ; ſi nimirum recta A O per b exprimatur et M X $= y = z$ ſin. ψ. Tum vero ſumtis differentialibus, erit

$$\left(\frac{d\,x}{d\,s}\right) = -\left(\frac{d\,z}{d\,s}\right)\text{coſ.}\,\psi + \text{ſin.}\,\psi;$$

$$\left(\frac{d\,y}{d\,s}\right) = \left(\frac{d\,z}{d\,s}\right)\text{ſin.}\,\psi + \text{coſ.}\,\psi.$$

Si

Si nunc centro O radio O M deſcriptus intelligatur arcus M e, qui ponatur $= du$, exiſtente $me = dz$, erit ob $d\psi = \frac{du}{z}$; $z\, d\psi = du = ds$ proxime; tumque ob $(\frac{du}{dt}) = z(\frac{d\psi}{dt})$ fiet:

$$(\tfrac{dx}{dt}) = -(\tfrac{dz}{dt})\,\text{coſ.}\,\psi + (\tfrac{du}{dt})\,\text{ſin.}\,\psi, \text{ et}$$

$$(\tfrac{dy}{dt}) = (\tfrac{dz}{dt})\,\text{ſin.}\,\psi + (\tfrac{du}{dt})\,\text{coſ.}\,\psi.$$

Hinc ſi ſtatuatur $(\frac{du}{dt}) = 0$, fiet

$$(\tfrac{dx}{dt}) = -(\tfrac{dz}{dt})\,\text{coſ.}\,\psi;\ (\tfrac{dy}{dt}) = (\tfrac{dz}{dt})\,\text{ſin.}\,\psi;$$

vnde vero denuo differentiando elicitur:

$$(\tfrac{ddx}{dt^2}) = -(\tfrac{ddz}{dt^2})\,\text{coſ.}\,\psi;\ \text{et}$$

$$(\tfrac{ddy}{dt^2}) = -(\tfrac{ddz}{dt^2})\,\text{ſin.}\,\psi.$$

His igitur valoribus in aequationibus I. et II. ſubſtitutis, iſtae aequationes ita habentur transformatae:

$$(\tfrac{dT}{ds}) + V(\tfrac{d\Phi}{ds}) = \tfrac{1}{2g}(\tfrac{ddz}{dt^2})(\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\psi - \text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\psi)$$
$$- P\,\text{ſin.}\,\Phi - Q\,\text{coſ.}\,\Phi$$
$$= \tfrac{1}{2g}(\tfrac{dz}{ds})(\tfrac{ddz}{dt^2}) - P(\text{ſin.}\,\psi - (\tfrac{dz}{ds})\,\text{coſ.}\,\psi)$$
$$- Q(\text{coſ.}\,\psi + (\tfrac{dz}{ds})\,\text{ſin.}\,\psi);\ \text{ob}$$

$$\text{ſin.}\,\psi = \text{coſ.}\,XMO = \text{coſ.}\,\psi = \text{ſin.}\,XMO,$$

hincque

$$\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\psi - \text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\psi = \text{coſ.}\,AMO = (\tfrac{dz}{ds}).$$

Simili modo fiet, ob

$$\text{ſin.}\,AMO = \text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\psi + \text{coſ.}\,\psi\,\text{coſ.}\,\Phi = (\tfrac{du}{ds}) = 1;$$

$$(\tfrac{dV}{ds}) - T(\tfrac{d\Phi}{ds}) = \tfrac{1}{2g}(\tfrac{ddz}{dt^2})(\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\psi + \text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\psi)$$
$$- Q\,\text{ſin.}\,\Phi + P\,\text{coſ.}\,\Phi$$
$$= \tfrac{1}{2g}(\tfrac{ddz}{dt^2}) - Q(\text{coſ.}\,\psi + (\tfrac{dz}{ds})\,\text{ſin.}\,\psi)$$
$$+ P(\text{ſin.}\,\psi - (\tfrac{dz}{ds})\,\text{coſ.}\,\psi).$$

Quod

Quod ſi nunc $(\frac{dz}{ds})$ pro euaneſcente habeatur, et vires elementares P et Q nihilo aequari ſupponantur, has binas obtinebimus aequationes:

$$(\frac{dT}{ds}) + V(\frac{d\Phi}{ds}) = 0;\ (\frac{dV}{ds}) - T(\frac{d\Phi}{ds}) = \frac{1}{2g}(\frac{ddz}{dt^2}).$$

Quia autem pro caſu hoc propoſito eſt

$$Vv = G((\frac{d\Phi}{ds}) - \frac{1}{a}),\ \text{fiet}$$

$$(\frac{d.Vv}{ds}) = G(\frac{dd\Phi}{ds^2}) = V,$$

ideoque ob

$$ds(\frac{dT}{ds}) + G\,ds(\frac{dd\Phi}{ds^2})(\frac{d\Phi}{ds}) = 0;$$

erit iterum integrando $T + \frac{1}{2}G(\frac{d\Phi}{ds})^2 = A$, vnde denuo conſequemur iſtam aequationem pro motu fili elaſtici:

$$G((\frac{d^3\Phi}{ds^3}) + \frac{1}{2}(\frac{d\Phi}{ds})^3) - A(\frac{d\Phi}{ds}) = \frac{1}{2g}(\frac{ddz}{dt^2});$$

in qua aequatione nunc tantum requiritur vt $(\frac{d\Phi}{ds})$ per z et eius differentialia exprimatur. Iam ſi radius curuaturae pro curua A M ad punctum M ponatur $= R$, ita vt ſit $\frac{1}{R} = (\frac{d\Phi}{ds})$, erit per generalem formulam pro radiis curuaturae:

$$(\frac{d\Phi}{ds}) = \frac{1}{R} = \frac{dzddu - duddz}{ds^3} + \frac{du}{zds},$$

in qua expreſſione nullum differentiale ſuppoſitum eſt conſtans; at ſi ponatur ds conſtans, vnde fiet $duddu = -dzddz$, habebimus omnino:

$$(\frac{d\Phi}{ds}) = \frac{du}{zds} - \frac{ds}{du}\cdot\frac{ddz}{ds^2} = \frac{\sin.\Phi'}{z} - \frac{1}{\sin.\Phi'}\cdot(\frac{ddz}{ds^2});$$

poſito angulo $AMO = \Phi'$, hinc vero differentiando colligitur:

$$(\frac{dd\Phi}{ds^2}) = -\frac{\sin.\Phi'}{z^2}(\frac{dz}{ds}) - \frac{1}{\sin.\Phi'}(\frac{d^3z}{ds^3});\ \text{nec non}$$

$$(\frac{d^3\Phi}{ds^3}) = -\frac{1}{z^2}(\frac{ddz}{ds^2}) - (\frac{d^4z}{ds^4}).$$

 Ge-

Generatim quidem habetur

$$\left(\frac{dd\Phi}{ds^2}\right) = -\frac{\text{ſin.}\,\Phi'}{z^2}\left(\frac{dz}{ds}\right) + \left(\frac{d\Phi'}{ds}\right)\frac{\text{coſ.}\,\Phi'}{z} - \frac{1}{\text{ſin.}\,\Phi'}\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)$$

$$+ \left(\frac{d\Phi'}{ds}\right)\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\frac{\text{coſ.}\,\Phi'}{\text{ſin.}\,\Phi'^2} = -\frac{\text{ſin.}\,\Phi'}{z^2}\left(\frac{dz}{ds}\right) - \frac{\text{coſ.}\,\Phi'}{z}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$$

$$- \frac{1}{\text{ſin.}\,\Phi'}\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right) - \frac{\text{coſ.}\,\Phi'}{\text{ſin.}\,\Phi^3}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)^2; \text{ quia}$$

$$-\left(\frac{d\Phi'}{ds}\right) = \frac{1}{\text{ſin.}\,\Phi'}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right), \text{ vel ſimpliciter } -\left(\frac{d\Phi'}{ds}\right) = \left(\frac{ddz}{ds^2}\right);$$

vbi autem iſti termini per coſ. Φ' multiplicati euaneſcere ſunt cenſendi, quia $\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$ eſt quam minimum, tumque coſ. Φ' a quantitate euaneſcente vix differt. Ex his igitur, ob

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2z^3} - \frac{3}{2z^2}\cdot\left(\frac{ddz}{ds^2}\right),$$

concluditur quam proxime

$$G\left(\left(\frac{d^3\Phi}{ds^3}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^3\right) = G\left(-\left(\frac{d^4z}{ds^4}\right) - \frac{5}{2z^2}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right) + \frac{1}{2z^3}\right);$$

ideoque aequatio pro motu fili elaſtici:

$$G\left(-\left(\frac{d^4z}{ds^4}\right) - \frac{5}{2z^2}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right) + \frac{1}{2z^3}\right) - A\left(\frac{1}{z} - \left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

Iam ſi pro ſtatu naturali vis tangentialis T euaneſcat, quia tum $\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{1}{a}$, fiet pro iſto caſu

$$T = A - \tfrac{1}{2}G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 = A - \frac{G}{2a^2} = 0,$$

vnde concluditur $A = \frac{G}{2a^2}$, et hoc valore ſubſtituto erit aequatio noſtra

$$G\left(-\left(\frac{d^4z}{ds^4}\right) - \frac{2}{a^2}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right);$$

quia nimirum in aequatione finali nihil obſtat, quin $\frac{1}{z}$ ſtatuatur $= \frac{1}{a}$.

§. 6. Aequatio modo inuenta etiamſi valde diſcrepet ab illa quam Illuſtr. *Eulerus* in Tomo X Nouorum Com-

Comment. inuenerat, et quae ad ſequentem redit formam:

$$G\left(\left(\frac{d^4 z}{d s^4}\right) + \frac{1}{a^2}\left(\frac{d d z}{d s^2}\right)\right) = -\frac{1}{2g}\left(\frac{d d z}{d t^2}\right);$$

exiſtimo tamen illam a me propoſitam accuratiorem eſſe habendam. Quod vt dilucide ob oculos ponam, primum obſeruo quodſi pro quantitate $\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$ loco $\frac{\text{ſin.}\Phi'}{z} - \frac{1}{\text{ſin.}\Phi'}\left(\frac{d d z}{d s^2}\right)$, vel ſimpliciter $\frac{1}{z} - \left(\frac{d d z}{d s^2}\right)$, adhibeatur cum Illuſtri *Eulero* iſta formula $\frac{1}{a} - \left(\frac{d d z}{d s^2}\right)$, tum omnino nullum remanere dubium, quin duplici differentiatione ad iſtam perueniatur aequationem $\left(\frac{d^3\Phi}{d s^3}\right) = -\left(\frac{d^4 z}{d s^4}\right)$. Adhibitis autem denominationibus ab Illuſtri *Eulero* in vſum vocatis, quibus eſt $N n = d x$; $M N = y$; $m e = d y$ et $M m = d s$, fit

$$\frac{1}{R} = \frac{(a+y)^2 d x^3 + 2 a^2 d x d y^2}{a^3 d s^3} - \frac{(a+y) d x d d y}{a d s^3},$$

poſito $d x$ conſtante. Et quia $d u : d x = a + y : a$, facile liquet hanc formulam ad iſtam reduci:

$$\frac{1}{R} = \frac{a^2 d x d u^2 + 2 a^2 d x d y^2}{a^3 d s^3} - \frac{d u d d y}{d s^3} = \frac{d x}{a d s} + \frac{d x d y^2}{a d s^3} - \frac{d u d d y}{d s^3},$$

vbi quidem, ob $d y$ valde paruum, ſecundus terminus negligi poteſt, eritque adeo

$$\frac{1}{R} = \frac{d x}{a d s} - \frac{d u d d y}{d s^3} = \frac{d u}{2 d s} - \frac{d u d d y}{d s^3},$$

prorſus vt nos quoque ſupra inuenimus. Heic vero minus recte infertur eſſe $\frac{d x}{a d s} = \frac{1}{a}$, quia $d x$ proxime $= d s$, nam accuratius habetur $d x = d s - \frac{y d s}{a+y}$, ideoque erit

$$\frac{d x}{a d s} = \frac{1}{a} - \frac{y}{a(a+y)} \frac{1}{a} - \frac{y}{a^2},$$

hinc autem per duplicem differentiationem omnino prodit eiusmodi terminus $-\frac{1}{a^2}\left(\frac{d d y}{d s^2}\right)$, qui omnino conuenit cum illo a nobis inuento $-\frac{1}{a^2}\left(\frac{d d z}{d s^2}\right)$. Quia vero formula $\left(\frac{d^3\Phi}{d s^3}\right)$ inuoluit differentialia ſecundi ordinis iſtius quantitatis $\frac{1}{R}$, minime quidem in noſtro arbitrio poſitum eſſe crediderim,

 pro

pro iſta expreſſione $\frac{1}{R}$ eiusmodi reductionum vſum facere, quae non niſi in expreſſione vltimata pro $(\frac{d^3\Phi}{ds^3})$ admitti debere videntur.

§. 7. Quodſi vero recte ſe haberet iſta poſitio:

$$(\frac{d\Phi}{ds}) = \frac{1}{R} = \frac{1}{a} - (\frac{ddz}{ds^2}),$$

omnino eſſet aequatio pro motu laminae:

$$G((\frac{d^4 z}{ds^4}) + \frac{1}{a^2}(\frac{ddz}{ds^2})) = -\frac{1}{2g}(\frac{ddz}{dt^2});$$

quae quidem cum illa *Euleriana* in Tomo X. Nouorum Commentar. allata, penitus conſentit. Nam pro laminis elaſticis quarum craſſities eſt cc, G erit proportionale huiusmodi quantitati bc^4, exiſtente pro eo caſu $s = cc$, tumque aequatio propoſita in hanc transformatur:

$$2bgc^2(-(\frac{d^4 z}{ds^4}) - \frac{1}{a^2}(\frac{ddz}{ds^2})) = (\frac{ddz}{dt^2});$$

vbi nunc b idem ſignificat quod apud *Eulerum* Tomo X. Comment. pag. 269. per $\frac{E}{\delta}$ deſignatur. Nunc autem altera maximi momenti oritur quaeſtio vtrum in iſta aequatione vltimo allata, terminum $\frac{1}{a^2}(\frac{ddz}{ds^2})$ plane negligere liceat, quemadmodum ipſe Illuſtris *Eulerus* loco citato Actorum Academiae pro Anno 1779, haud obſcure innuere videtur. Quum autem iſte terminus oriatur ob vim tangentialem, qua lamina afficitur, liquet eum negligi non poſſe niſi iſta vis tangentialis euaneſcat. Si autem pro ſtatu naturali laminae iſta vis euaneſcens fuerit, inde quidem non legitima inductione concluderetur, eam pro quocunque alio ſtatu laminae eſſe euaneſcentem. Nam ſi pro ſtatu initiali ſit $T = 0$, colligitur vti ſupra vidimus $A = \frac{G}{2a^2}$, et pro alio quocunque ſtatu laminae, fiet

$$T = \frac{G}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 - A = \frac{G}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\right) - \frac{G}{2a^2} = -\frac{G}{a}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right).$$

Tantum autem abeſt vt vis illa tangentialis prorſus euaneſcat, vt potius neceſſario locum habere debeat, praeſertim ſi motus ita fieri concipiatur, vt vibratione laminae elementum laminae circularis Nn, in Mm perueniſſe ſupponatur, quod ob $Mm > Nn$, minime quidem fieri poteſt, niſi Mm inſignem patiatur tenſionem. Quicquid autem ſit, ſaltem perſpicuum non eſt, cur iſte terminus $\frac{1}{a^2}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$ plane negligi debeat, niſi idem prae altero $\left(\frac{d^4 z}{ds^4}\right)$ euaneſcat, cuius autem rei nullum ſe offert indicium. Vt rem breui complectar, ſi formula pro motu laminarum elaſticarum in arcus circulares incuruatarum ita ſtatuatur expreſſa:

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -\left(\frac{2g\,Ecc}{\delta}\left(\left(\frac{d^4 z}{ds^4}\right) + \frac{1}{a^2}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\right)\right);$$

tumque iſte terminus $\frac{1}{a^2}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$ plane ſecludendus perhibeatur, id fiet aut quia $\frac{1}{a} = 0$, vel quia $\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$ prae $\left(\frac{d^4 z}{ds^4}\right)$ euaneſcit; quum autem hoc nullibi ſit demonſtratum, talem ſuppoſitionem vix admitti poſſe mihi perſuadeo.

§. 8. Quia ſupra §. 4. pro T ad binas peruenimus expreſſiones:

$$T = -\left(\frac{dx}{ds}\right)\int P' ds - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q' ds \text{ et}$$

$$T = -\tfrac{1}{2}G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + A;$$

operae omnino pretium eſt, vt oſtendamus has expreſſiones perfecte inter ſe conciliari, caſu quo $P' = 0$, et $Q' = -\frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, quem in finem demonſtrari debet eſſe:

$$T = -\left(\frac{dx}{ds}\right)E - T\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{S}{2g}\left(\frac{dy}{ds}\right)\int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\tfrac{1}{2}G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + A,$$

 ſiue

ſiue quod eodem redit:

$$-E\,\text{ſin.}\Phi - T\,\text{coſ.}\Phi + \frac{S}{2g}\,\text{coſ.}\Phi \int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{G}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + A.$$

Iam ſi differentialia ſumantur pro variabilitate ipſius s habebimus

$$-E\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\text{coſ.}\Phi + F\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\text{ſin.}\Phi - \frac{S}{2g}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\text{ſin.}\Phi \int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$$
$$= -G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\left(\frac{dd\Phi}{ds^2}\right);$$

et diuidendo per $\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$ prodit

$$-E\,\text{coſ.}\Phi + F\,\text{ſin.}\Phi - \frac{S}{2g}\,\text{ſin.}\Phi \int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -G\left(\frac{dd\Phi}{ds^2}\right);$$

vnde denuo differentiando colligimus:

$$E\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\text{ſin.}\Phi + F\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\text{coſ.}\Phi - \frac{S}{2g}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\text{coſ.}\Phi \int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$$
$$-\frac{S}{2g}\,\text{ſin.}\Phi\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -G\left(\frac{d^3\Phi}{ds^3}\right);$$

quum vero ſupra inuentum ſit:

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\left(E\,\text{ſin.}\Phi + F\,\text{coſ.}\Phi - \frac{S}{2g}\,\text{coſ.}\Phi \int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\right)$$
$$= \frac{G}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^3 - A\left(\frac{d\Phi}{ds}\right);$$

fiet hinc

$$\frac{G}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^3 - A\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -G\left(\frac{d^3\Phi}{ds^3}\right).$$

Hoc igitur exemplo iam comprobatur, in differentiatione iſtos terminos non eſſe ſecludendos qui quaſi pro euaneſcentibus habentur, antequam ad vltimum differentiale ſeu $\left(\frac{d^3\Phi}{ds^3}\right)$ fuerit peruentum. Nam ſi in aequatione valorem ipſius T exprimente termini per $\left(\frac{dy}{ds}\right)$ affecti plane pro omittendis haberentur, quia $\left(\frac{dy}{ds}\right)$ quaſi euaneſcens habetur, ſimulque ſtatueretur $\left(\frac{dx}{ds}\right) = 1$, inde omnino ſequeretur $\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 =$ quantitati conſtanti, ideoque $\left(\frac{dd\Phi}{ds}\right) = 0$, et $\left(\frac{d^3\Phi}{ds^2}\right) = 0$, quorum neutrum veritati conſentaneum eſſe

poteſt

poteſt. Caeterum de differentiatione modo inſtituta adhuc notare conuenit, quod in prima operatione terminus quidam praetermiſſus eſſe videatur, ille nimirum $\frac{S}{2g}$ coſ. $\Phi(\frac{ddy}{dt^2})$; verum ſi ratiocinium quo in §. 4. ad valorem ipſius T peruenimus, examinemus; facile perſpiciemus exactum valorem ipſius T fore

$$= A - \tfrac{1}{2} G (\tfrac{d\Phi}{ds})^2 + \tfrac{S}{2g} \int ds.\ \text{coſ.}\ \Phi (\tfrac{ddy}{dt^2});$$

vnde facile patet differentiatione inſtituta hunc terminum $\frac{S}{2g}$ coſ. $\Phi(\frac{ddy}{dt^2})$ plane elidi.

§. 9. Si lamina elaſtica in ſtatu initiali in quamcunque figuram curuilineam B N n incuruetur, durante autem motu vibratorio haec figura in iſtam A M m mutetur, tum pro vibrationibus quidem minimis, ſi ex punctis M, m ducantur normales ad curuam B N n, M N, $m\,n$, quae in puncto O concurrant, erit hoc punctum O centrum curuaturae pro curua B N n ad punctum N, tum vero ſi ductae intelligantur rectae M P, m P normales ad curuam A M m in punctis M, m, radius curuaturae M P inde oriundus ſequentem in modum determinatur. Si ducantur tangentes proximae curuae A M m, T M, $t\,m$, conſtat eſſe: Tab. II. Fig. 3.

$$\text{ang.}\ tmo = tm\text{T} + \text{T}m\text{O} = \text{MP}m + \text{T}m\text{O};\ \text{et}$$
$$\text{ang. TMO} = \text{MO}m + \text{T}m\text{O};\ \text{hincque}$$
$$tmo - \text{TMO} = \text{MP}m - \text{MO}m;$$

ſi igitur angulus T M O exprimatur per Φ', et ponantur M N $= z$, N O $= r$, tum ſi centro O radio O M deſcriptus fuerit arcus M e, exprimantur quoque differentialia M e, me, M m reſpectiue per du, dz, ds. Hac conſtructio-

ſtructione adhibita patet eſſe $\text{ſin.}\,\Phi' = \frac{du}{ds}$; $\text{coſ.}\,\Phi' = \frac{dz}{ds}$, hincque $-\left(\frac{d\Phi'}{ds}\right) = \frac{1}{\text{ſin.}\,\Phi'}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$, ſiue ſimpliciter $-\left(\frac{d\Phi'}{ds}\right) = \left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$ ob $\text{ſin.}\,\Phi'$ parum ab vnitate diſcrepantem. Vlterius autem habebitur:

$$\text{ang. MO}m = \frac{\text{M}e}{\text{MO}} = \frac{du}{r+z};\ \text{ang. MP}m = \frac{\text{M}m}{\text{MP}} = \frac{ds}{\text{R}},$$

ex quo hanc obtinemus aequationem:

$$\frac{1}{r+z}\cdot\frac{du}{ds} - \frac{1}{\text{R}} = \frac{1}{\text{ſin.}\,\Phi'}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right),$$

vel quod eodem redit

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{1}{\text{R}} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi'}{r+z} - \frac{1}{\text{ſin.}\,\Phi'}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right),$$

quae formula prorſus ſimilis eſt illi quam ſupra pro circulo inuenimus. Supponamus nunc vires elementares euaneſcentes, tumque conſimili ratiocinio ac §. 5. adhibuimus ad has perducemur aequationes:

$$\left(\frac{d\text{T}}{ds}\right) + \text{V}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = 0;\ \left(\frac{d\text{V}}{ds}\right) - \text{T}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

Hinc autem colligimus, ob

$$\text{V}v = \text{G}\left(\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \frac{1}{r}\right),$$

deſignante r radium curuaturae ad punctum N,

$$\text{V} = \left(\frac{d.\,\text{V}v}{ds}\right) = \text{G}\left(\left(\frac{dd\Phi}{ds^2}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)\right).$$

Tumque denuo differentiando:

$$\left(\frac{d\text{V}}{ds}\right) = \text{G}\left(\left(\frac{d^3\Phi}{ds^3}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{ddr}{ds^2}\right) - \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right).$$

Deinde ob

$$\left(\frac{d\text{T}}{ds}\right) + \text{V}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \left(\frac{d\text{T}}{ds}\right) + \text{G}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\left(\left(\frac{dd\Phi}{ds^2}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)\right);$$

fiet multiplicando per ds et integrando:

$$\text{T} + \tfrac{1}{2}\text{G}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + \text{G}\int\frac{ds}{r^2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right) = \text{A}.$$

hinc ex aequatione

$$\left(\frac{dV}{ds}\right) - T\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right),$$

ſubſtituendo pro $\left(\frac{dV}{ds}\right)$ et T valoribus modo inuentis, iſta colligitur aequatio:

$$G\left(\left(\frac{d^3\Phi}{ds^3}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{ddr}{ds^2}\right) - \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right) + \frac{1}{2}G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2$$
$$+ G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\int\frac{ds}{r^2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right) - A\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

In qua formula vt vnice per variabiles z, s, t exprimatur, pro $\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$ ſubſtitui debet $\frac{\textit{ſin.}\,\Phi'}{r+z} - \frac{1}{\textit{ſin.}\,\Phi'}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$, vel ſimpliciter $\frac{1}{r+z} - \left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$. Quodſi nunc in hac formula loco $\frac{\textit{ſin.}\,\Phi'}{r+z}$ adhibere liceret $\frac{1}{r}$, fieret omnino $Vv = -G\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$, vnde differentiando colligeretur

$$\left(\frac{d.\,Vv}{ds}\right) = V = -G\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right) \text{ et } \left(\frac{dV}{ds}\right) = -G\left(\frac{d^4z}{ds^4}\right).$$

Tum vero ſi inſuper ſuponamus vim tangentialem euaneſcentem ſeu $T = 0$, habebitur omnino:

$$\left(\frac{dV}{ds}\right) = -G\left(\frac{d^4z}{ds^4}\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right),$$

pro motu laminae elaſticae.

Priusquam igitur haec aequatio pro exacte vera haberi queat, demonſtrandum eſt, ſemper et in omni caſu fore $Vv = -G\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$, tumque ſecundo vim tangentialem recte pro euaneſcente aſſumi poſſe.

§. 10. Quoniam autem hae ſuppoſitiones nimis gratuitae videntur, examinemus potius qualis ſit vera aequatio pro motu laminarum elaſticarum, ſi nimirum loco $\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)$ ſufficiatur eius valor $\frac{1}{r+z} - \left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$. Colligimus autem differentiando:

$$\left(\frac{dd\Phi}{ds^2}\right) = -\left(\frac{dr}{ds}\right)\frac{1}{(r+z)^2} - \left(\frac{dz}{ds}\right)\frac{1}{(r+z)^2} - \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right);$$

tumque

$$\left(\frac{d^3\Phi}{ds^3}\right) = -\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\frac{1}{(r+z)^2} - \left(\frac{ddr}{ds^2}\right)\frac{1}{(r+z)^2} - \left(\frac{d^4z}{ds^4}\right);$$ vel

$$\left(\frac{d^3\Phi}{ds^3}\right) = -\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\frac{1}{r^2} - \left(\frac{ddr}{ds^2}\right)\frac{1}{r^2} - \left(\frac{d^4z}{ds^4}\right),$$

hic enim nihil obſtat quo minus loco $\frac{1}{r+z}$ adhibeatur $\frac{1}{r}$. Tum vero erit:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^2}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\right) \text{ et}$$

$$\int\frac{ds}{r^2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right) = \int\frac{ds}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(1 - \left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\right) = -\frac{1}{2r^2} - \int\frac{ds}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{ddz}{ds^2}\right);$$

hinc fiet

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\int\frac{ds}{r^2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right) = -\frac{1}{2r^3} + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right) - \frac{1}{r}\int\frac{ds}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{ddz}{ds^2}\right):$$

Iam ſi conſtans A ita definiatur vt vis tangentialis pro ſtatu initiali euaneſcat, colligitur

$$A = \tfrac{1}{2}G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + G\int\frac{ds}{r^2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{G}{r^2} + G\int\frac{ds}{r^3}\left(\frac{dr}{ds}\right),$$

quia pro ſtatu initiali $\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{1}{r}$. Collectim igitur ſumendis omnibus terminis fiet aequatio pro motu laminae:

$$G\left(-\left(\frac{d^4z}{ds^4}\right) - \frac{2}{r^2}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right) - \frac{1}{r}\int\frac{ds}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right),$$

ſeu quod eodem redit

$$G\left(-\left(\frac{d^4z}{ds^4}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right) - \frac{1}{r}\int\frac{ds}{r}\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

Haec autem aequatio ſi multiplicetur per r et denuo differentietur poſita s variabili, a ſigno ſummatorio prorſus liberari poterit, verum eo ipſo ad aequationem peruenietur, quae differentialia quinti gradus inuoluit. Multo autem facilius ad hanc aequationem peruenietur, ſi quaeratur valor ipſius

$$V v = G\left(\frac{1}{r+z} - \left(\frac{ddz}{ds^2}\right) - \frac{1}{r}\right) = G\left(\frac{z}{r^2} - \left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\right),$$

hinc enim differentiando obtinebimus:

V =

$$V = \left(\frac{d.Vv}{ds}\right) = G\left(\frac{-1}{r^2}\left(\frac{dz}{ds}\right) - \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{dV}{ds}\right) = G\left(-\left(\frac{d^4z}{ds^4}\right) \frac{-1}{r^2}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\right);$$

poſita in iſta differentiatione dr conſtanti. Tum vero quia eſt:

$$T = -G\left(\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + \int \frac{ds}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\right), \text{ ob}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + \int \frac{ds}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \int \left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\left(ds\left(\frac{dd\Phi}{ds^2}\right) + \frac{ds}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)\right);$$

quia eſt

$$\left(\frac{dd\Phi}{ds^2}\right) = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right) - \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right),$$

hinc colligitur

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + \int \frac{ds}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = -\int ds\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right) \text{ et}$$

$$T\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = +\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\int ds\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right) = \frac{1}{r}\int \frac{ds}{r}\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right),$$

ponendo nimirum heic ſimpliciter $\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{1}{r}$. His valoribus ſuffectis iſta prodit aequatio:

$$G\left(-\left(\frac{d^4z}{ds^4}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right) - \frac{1}{r}\int \frac{ds}{r}\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right);$$

ideoque

$$G\left(-\left(\frac{d^4z}{ds^4}\right) - \frac{z}{r^2} - \left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right),$$

quatenus ſcilicet in integratione termini $\frac{ds}{r}\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)$, $\frac{1}{r}$ habetur pro conſtanti.

Cum ſupra quando curua in ſtatu initiali figuram obtinet circularem inuentum eſſet $A = +\frac{G}{2a^2}$, merito quaeritur cur pro caſu praeſenti penitus euaneſcat, verum perpendendum eſt terminum ſummatorium $\int \frac{ds}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$ iam ipſum A inuoluere.

§. 11. Quamuis inſtituti noſtri ratio non ferat vt penitus exponamus quae de reſolutione aequationis:

$$-2bgc^2\left(\left(\frac{d^4z}{ds^4}\right)+\frac{2}{a^2}\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)\right)=\left(\frac{ddz}{dt^2}\right);$$

pro vibrationibus laminarum elaſticarum in arcus circulares flexarum, tradi poſſent, ſpecimen tamen quoddam huius reſolutionis heic tradere non praeter rem erit. Primum igitur notamus, quod cum ſupra ipſam diſtantiam M O per z deſignatam habuerimus, nunc per z non niſi lineolam M N exprimemus, qua mutatione facta aequatio iſta differentialis manet vt ante. Quia autem, cum de reſolutione aequationis propoſitae agitur, integrale eius completum vix exſpectari queat, caſum tantum conſiderabimus particularem quo z exprimitur per productum binarum functionum vnam ipſius s alteram ipſius t, quem in finem ſtatuamus $z=\sigma\tau$, exiſtente σ functione ſolius s et τ functione ſolius t. Sumtis nunc differentialibus habemus:

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)=\tau\left(\frac{d\sigma}{ds}\right);$$

$$\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)=\tau\left(\frac{dd\sigma}{ds^2}\right) \text{ et } \left(\frac{d^4z}{ds^4}\right)=\tau\left(\frac{d^4\sigma}{ds^4}\right);$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)=\sigma\left(\frac{d\tau}{dt}\right) \text{ et } \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\sigma\left(\frac{dd\tau}{dt^2}\right);$$

quibus valoribus ſubſtitutis colligimus:

$$-2bgc^2\tau\left(\left(\frac{d^4\sigma}{ds^4}\right)+\frac{2}{a^2}\left(\frac{dd\sigma}{ds^2}\right)\right)=\sigma\left(\frac{dd\tau}{dt^2}\right);$$

huic autem aequationi manifeſto ſatisfit, ponendo:

$$\frac{dd\tau}{dt^2}=n\tau \text{ et } -2bgc^2\left(\frac{d^4\sigma}{ds^4}+\frac{2}{a^2}\frac{dd\sigma}{ds^2}\right)=n\sigma.$$

Quodſi nunc ſolutio ita deſideretur adornata, vt motus vibratorii regulares fiant, ſi k ſit longitudo penduli ſimplicis, cum lamina elaſtica iſochroni, habebitur $\frac{dd\tau}{dt^2}=-\frac{2g\tau}{k}$, ita

ita vt iam fiat $n = -\frac{2g}{k}$, hinc ergo quoque erit

$$b\,k\,c^2\left(\frac{d^4\sigma}{ds^4} + \frac{2}{a^2}\cdot\frac{dd\sigma}{ds^2}\right) = \sigma.$$

Totum igitur negotium nunc eo reducitur, vt inueniantur valores ipſorum τ et σ his aequationibus ſatisfacientes. Priori autem aequationi ſatisfacere inuenitur iſtud integrale $\tau = F\,\text{ſin.}\left(\eta + t\sqrt{\frac{2g}{k}}\right)$, quod omnino pro completo habendum eſt, quia binas inuoluit conſtantes arbitrarias F et η. Pro altera autem aequatione integranda ſtatuamus $b\,k\,c^2 = m^4$, ita vt fiat:

$$\frac{d^4\sigma}{ds^4} + \frac{2}{a^2}\cdot\frac{dd\sigma}{ds^2} = \frac{\sigma}{m^4},$$

et ſi multiplicetur haec aequatio per $e^{\mu s}$, exiſtente e quantitate cuius Logarithmus hyperbolicus $= 1$, tumque integrale oriundum ponatur:

$$e^{\mu s}\left(\frac{d^3\sigma}{ds^3}\right) + \frac{\alpha\,dd\sigma}{ds^2} + \beta\frac{d\sigma}{ds} + \gamma\,\sigma) = A;$$

erit differentiando:

$$\frac{d^4\sigma}{ds^4} + \alpha\frac{d^3\sigma}{ds^3} + \beta\frac{dd\sigma}{ds^2} + \gamma\frac{d\sigma}{ds}$$
$$+ \mu\frac{d^3\sigma}{ds} + \mu\,\alpha\frac{dd\sigma}{ds^2} + \mu\,\beta\frac{d\sigma}{ds} + \mu\,\gamma\,\sigma = 0;$$

quae cum aequatione propoſita comparata, praebet:

$$\alpha + \mu = 0;\ \beta + \mu\,\alpha = \frac{2}{a^2};\ \gamma + \mu\,\beta = 0;\ \mu\,\gamma = -\frac{1}{m^4};$$

ex quo concluditur:

$$\alpha = -\mu;\ \beta = \mu^2 + \frac{2}{a^2};\ \gamma = -\mu\,\beta = -\mu^3 - \frac{2\mu}{a^2};$$

et denique

$$\mu\,\gamma = -\mu^4 - \frac{2\mu^2}{a^2} = -\frac{1}{m^4};\ \text{vnde fit}$$
$$\mu^4 + \frac{2\mu^2}{a^2} - \frac{1}{m^4} = 0;$$

ex qua aequatione biquadratica valores ipſius μ definiri poterunt, qui erunt

$$\mu = \pm \surd(\surd(\tfrac{1}{a^4} + \tfrac{1}{m^4}) - \tfrac{1}{a^2}) = \pm \tfrac{1}{a}\surd(\surd(1 + \tfrac{a^4}{m^4}) - 1) \text{ et}$$

$$\mu = \pm \tfrac{1}{a}\surd(1 - \surd(1 + \tfrac{a^4}{m^4})),$$

qui bini poſteriores ſunt imaginarii, quia $b k c^2 = m^4$ non poteſt non eſſe poſitiuum. Ex his igitur nunc liquet integrale aequationis completum fore:

$$\sigma = A e^{\mu s} + B e^{-\mu s} + C e^{\mu' s \surd -1} + D e^{-\mu' s \surd -1};$$

vbi quidem quia $e^{\mu' s \surd -1}$; $e^{-\mu' s \surd -1}$ per coſ. $\mu' s$; ſin. $\mu' s$ facile exprimuntur, pro σ hanc adipiſcimur expreſſionem:

$$\sigma = A e^{\mu s} + B e^{-\mu s} + E \text{ coſ.} (\theta + \mu' s);$$

tumque fiet

$$z = \sigma \tau = F. \text{ ſin.} (\eta + t \surd \tfrac{2g}{k}) (A e^{\mu s} + B e^{-\mu s} + E \text{ coſ.} (\theta + \mu' s)).$$

Sumtis nunc differentialibus prodit:

$$(\tfrac{dz}{ds}) = F \text{ ſin.} (\eta + t \surd \tfrac{2g}{k}) (\mu A e^{\mu s} - \mu B e^{-\mu s} - \mu' E \text{ ſin.} (\theta + \mu' s));$$

$$(\tfrac{ddz}{ds^2}) = F \text{ ſin.} (\eta + t \surd \tfrac{2g}{k}) (\mu^2 A e^{\mu s} + \mu^2 B e^{-\mu s} - \mu'^2 E \text{ coſ} (\theta + \mu' s));$$

$$(\tfrac{d^4 z}{ds^4}) = F \text{ ſin.} (\eta + t \surd \tfrac{2g}{k}) (\mu^4 (A e^{\mu s} + B e^{-\mu s}) + \mu'^4 E \text{ coſ.} (\theta + \mu' s));$$

$$(\tfrac{dz}{dt}) = \surd \tfrac{2g}{k} . F \text{ coſ.} (\eta + t \surd \tfrac{2g}{k}) (A e^{\mu s} + B e^{-\mu s} + E \text{ coſ.} (\theta + \mu' s));$$

$$(\tfrac{ddz}{dt^2}) = - \tfrac{2g}{k} . F \text{ ſin.} (\eta + t \surd \tfrac{2g}{k}) (A e^{\mu s} + B e^{-\mu s} + E \text{ coſ.} (\theta + \mu' s));$$

Manifeſtum autem eſt his valoribus ſubſtitutis ſatisfieri aequationi:

$$2 b g c^2 ((\tfrac{d^4 z}{ds^4}) + \tfrac{2}{a^2} (\tfrac{ddz}{ds^2}) + (\tfrac{ddz}{dt^2})) = 0;$$

fiet enim

$$2 b g c^2 ((\mu^4 + \tfrac{2\mu^2}{a^2})(A e^{\mu s} + B e^{-\mu s}) + (\mu'^4 - \tfrac{2\mu'^2}{a^2}) E \text{ coſ} (\theta + \mu' s))$$
$$- \tfrac{2g}{k} (A e^{\mu s} + B e^{-\mu s} + E \text{ coſ.} (\theta + \mu' s)) = 0;$$

quae aequatio omnino eſt identica ob $b k c^2 = m^4$ et $\mu^4 + \tfrac{2\mu^2}{a^2} = \tfrac{1}{m^4}$, nec non $\mu'^4 - \tfrac{2\mu'^2}{a^2} = \tfrac{1}{m^4}$.

§. 12.

§. 12. Data hac occaſione nunc quoque de curvatura fili elaſtici in aequilibrio conſtituti, ſupplementi inſtar, quaedam heic adiicere haud praeter rem eſſe exiſtimamus. Inſeruit autem pro iſta figura inuenienda haec aequatio differentialis:

$$G\,(d^2\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,d\,\Phi^3) = A\,d\,\Phi\,d\,s^2,$$

quam igitur quomodo integrare oporteat nunc diſpiciamus. Statuamus autem maioris facilitatis cauſſa:

$$d^2\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,d\,\Phi^3 = C\,d\,\Phi\,d\,s^2,$$

pro qua aequatione integranda ſi adhibeatur multiplicator $e^{\lambda\Phi}$, tumque ſupponatur integrale oriundum eſſe:

$$e^{\lambda\Phi}\,(d\,d\,\Phi + \alpha\,d\,\Phi^2) = C\,P\,d\,s^2;$$

denotante P functionem quandam ipſius Φ, ſumtis differentialibus ita vt habeatur $d\,s$ pro conſtanti, fiet:

$$e^{\lambda\Phi}(d^3\Phi + 2\,\alpha\,d\Phi\,d\,d\,\Phi + \lambda.\,d\,\Phi\,d\,d\,\Phi + \lambda\,\alpha\,d\,\Phi^3) = C\,d\,P\,d\,s^2.$$

Si igitur aequatio propoſita multiplicata intelligatur per $e^{\lambda\Phi}$ et terminorum homologorum fiat comparatio, prodit: $2\,\alpha + \lambda = 0$; $\lambda\,\alpha = \frac{1}{2}$, vnde $\lambda^2 = -1$ et $\alpha = -\frac{\lambda}{2}$, tum vero erit $e^{\lambda\Phi}\,d\,\Phi = d\,P$ et integrando $P = \frac{1}{\lambda}\,(e^{\lambda\Phi} + A)$, ex quo binas iſtas conſequimur aequationes:

$$e^{\Phi\sqrt{-1}}(d\,d\,\Phi - \tfrac{\sqrt{-1}}{2}.\,d\,\Phi^2) = C\,d\,s^2\,.\,\tfrac{1}{\sqrt{-1}}\,(e^{\Phi\sqrt{-1}} + A);$$

$$e^{-\Phi\sqrt{-1}}\,(d\,d\,\Phi + \tfrac{\sqrt{-1}}{2}\,d\,\Phi^2) = -\,C\,d\,s^2\,.\,\tfrac{1}{\sqrt{-1}}(e^{-\Phi\sqrt{-1}} + B).$$

vel etiam

$$d\,d\,\Phi - \tfrac{\sqrt{-1}}{2}.\,d\,\Phi^2 = C\,d\,s^2\,.\,\tfrac{1}{\sqrt{-1}}\,(1 + A\,e^{-\Phi\sqrt{-1}});$$

$$d\,d\,\Phi + \tfrac{\sqrt{-1}}{2}.\,d\,\Phi^2 = -\,C\,d\,s^2\,.\,\tfrac{1}{\sqrt{-1}}\,(1 + B\,e^{\Phi\sqrt{-1}}).$$

Ideoque ſumta differentia harum aequationum:

$$d\,\Phi^2 = C\,d\,s^2\,(2 + B\,e^{\Phi\sqrt{-1}} - A\,e^{-\Phi\sqrt{-1}}).$$

Quia nunc eſt

$$e^{\Phi\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\,\Phi + \text{ſin.}\,\Phi\sqrt{-1}, \text{ et}$$
$$e^{-\Phi\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\,\Phi - \text{ſin.}\,\Phi\sqrt{-1},$$

inde colligitur iſta aequatio:

$$d\Phi^2 = C\,ds^2\,(2 + (B - A)\,\text{coſ.}\,\Phi + (B + A)\,\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{-1}).$$

Hinc ſi ſtatuatur

$$B - A = 2\,D\,\text{coſ.}\,\gamma \text{ et } B + A = 2\,D\,\text{ſin.}\,\gamma\sqrt{-1},$$

fiet

$$d\Phi^2 = C\,ds^2\,(2 + 2\,D\,\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\Phi - 2\,D\,\text{ſin.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\Phi)$$
$$= 2\,C\,ds^2\,(1 + D\,\text{coſ}\,(\gamma + \Phi)),$$

hincque

$$ds = \frac{d\Phi}{\sqrt{2C\,(1 + D\,\text{coſ.}\,(\gamma + \Phi))}},$$

aequatio pro curua quaeſita. Si igitur initium abſciſſarum ita ſumatur vt angulus γ euaneſcat, erit aequatio:

$$ds = \frac{d\Phi}{\sqrt{2C\,(1 + D\,\text{coſ.}\,\Phi)}},$$ hinc quum ſit

$$dx = ds\,\text{ſin.}\,\Phi = \frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{2C\,(1 + D\,\text{coſ.}\,\Phi)}},$$

integrando prodit

$$x = -\frac{\sqrt{2\,(1 + D\,\text{coſ.}\,\Phi)}}{D\sqrt{C}} + \text{Conſt.}$$

Verum magis conueniens fore mihi videtur, ſi ſtatuatur $\gamma = 90°$, ita vt aequatio pro curua elaſtica ſit

$$ds = \frac{d\Phi}{\sqrt{2C\,(1 + D\,\text{ſin.}\,\Phi)}}.$$

Tab. II. Fig. 4 Tum enim pro caſu quo lamina elaſtica A E M ad A parieti ſupponitur infixa, altera extremitate M pondere P onerata, fiet ad punctum A vis tangentialis

$$= -\tfrac{1}{2}\,G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + A.$$

Si igitur coordinatae curuae elaſticae pro puncto C ita defi-

deſignentur vt ſit $AD = x$, $DE = y$ et angulus $AED = \Phi$, erit pro puncto A, $\text{ſin.}\,\Phi = 0$, ideoque fiet $(\frac{d\Phi}{ds}) = 2C = \frac{2A}{G}$, hoc eſt in puncto A vis tangentialis penitus euaneſcit, quia lamina muro firmiter infixa ſupponitur. In genere autem habebitur vis tangentialis

$$= A - \frac{G}{2}(\frac{d\Phi}{ds})^2 = A - CG(1 + D\,\text{ſin.}\,\Phi) = - AD\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

ob $CG = A$, vis autem normalis momentum erit $AD\,\text{coſ.}\,\Phi$. Fiet autem hinc

$$dy = ds\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{\sqrt{2C(1 + D\,\text{coſ.}\,\Phi)}},$$

vnde integrando colligitur

$$y = \frac{\sqrt{2(1 + D\,\text{ſin.}\,\Phi)}}{D\sqrt{C}} + \text{conſt.},$$

vbi conſtans ita definiatur vt y euaneſcat poſito $\Phi = 0$, erit igitur in genere

$$y = \frac{\sqrt{2(1 + D\,\text{ſin.}\,\Phi)} - \sqrt{2}}{D.\sqrt{C}},$$

hincque concluditur $\text{ſin.}\,\Phi = y\sqrt{C}(\frac{1}{2}Dy\sqrt{C} - \sqrt{2})$, ex quo demum elici poterit aequatio inter x et y per formulam $dx = dy.\,\text{tang.}\,\Phi$.

§. 13. Quia vis tangentialis in A euaneſcit, erit pro puncto A, $G^2(\frac{d\Phi}{ds})^2 = \frac{1}{2}AG$, tum vero quoque liquet eſſe momentum ponderis P pro puncto A

$$= P.NM = G(\frac{d\Phi}{ds}) = \sqrt{\frac{AG}{2}}.$$

Si nunc pro altera extremitate laminae M angulus EMN indigitetur per Φ, primum erit vis tangentialis

$$= -AD.\,\text{ſin.}\,\Phi = P\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

ideoque $P = -AD$, tum vero quoque

$$NM = \frac{\sqrt{2(1 + D\,\text{ſin.}\,\Phi)} - \sqrt{2}}{D\sqrt{C}},$$ ideoque

$$\sqrt{\frac{AG}{2}} = P.NM = \frac{A(\sqrt{2} - \sqrt{2(1 + D\,\text{ſin}.\,\Phi)})}{\sqrt{C}}.$$

Haec igitur aequalitas ob $C = \frac{A}{G}$ ſubſiſtere nequit, niſi fuerit $1 + D\,\text{ſin}.\,\Phi = 0$, id eſt $\frac{d\Phi}{ds} = 0$, pro puncto M, adeoque radius curuaturae ad punctum M infinitum adipiſcetur valorem. His perpenſis nunc facile dubia diluentur quae Illuſtris *d'Alembert* in Tomo VII. Opuſculorum ſuorum et Opuſculo quidem LII^do^ circa doctrinam de figura laminarum elaſticarum propoſuit. Dum enim contendit aequilibrium ſubſiſtere non poſſe, niſi directio ponderis P in M applicatae fuerit ipſa tangens curuae elaſticae ad hoc punctum M, ex ſupra allatis facile liquet argumentum quo hanc ſuam Propoſitionem firmare nititur, non recte ſibi conſtare. Immo vero ſimplici valde ratiocinio demonſtratur, fieri omnino poſſe, vt directio vis MP cum curua in M angulum efficiat. Supponamus nimirum virgae rigidae LM in punctis L, *m*, M applicatas eſſe vires ſecundum directiones inter ſe parallelas, LH, Q*m*, MP, tum patet ſi ipſae vires reſpectiue exprimantur per H, Q, P pro aequilibrio eſſe debere H.L*m* = P.M*m* et H + P = Q. Nunc ſi ſupponamus eſſe M*m* lineolam infinite paruam, liquet vim minimam in L applicatam cum P in aequilibrio fore, tumque eſſe debere P = Q. Quodſi nunc loco portionis virgae rigidae L*m*, puncto *m* iuncta ſupponatur lamina elaſtica I*m*, ſi haec lamina in I viribus quibuscunque figatur, ob elaſticitatem laminae et vires in I applicatas orientur vires in punctum *m* agentes, atque ſi harum virium illa ſit indoles, vt ad vnicam reductae illa euadat aequalis ipſi P, ſitque eius directio contraria directioni MP, nihil omnino obſtat quin aequilibrium ſubſiſtat. Producta autem Q*m* ſi ex M in illam ducatur nor-

Tab. II. Fig. 5.

normalis M n, eſt momentum vis P reſpectu puncti m $= P . M n$, quod idem momentum quoque vi elaſticae ſeu expreſſioni $G\left(\frac{d\Phi}{d s}\right)$ aequari debet. Quum igitur hoc momentum ſit euaneſcens, ob M n infinite paruum, erit quoque $\frac{d\Phi}{d s}=0$, ſeu radius curuaturae ad punctum M infinitae erit magnitudinis: Principalis autem fallacia, quae Illuſtrem *d'Alembert* heic in errorem induxit, ex eo originem duxiſſe videtur, quod exiſtimauerit, vim P cum vi elaſtica laminae in aequilibrio eſſe non poſſe, niſi lamina vsque adeo inflectatur, vt fiat directio P M tangens curvae elaſticae in puncto M. Quod autem iſta ſuppoſitio ſit fallax, facile apparet, ſi laminae elaſticae I m iunctam ſupponamus virgam rigidam m M, tum enim nemo dubitabit, quin, etiamſi directio ponderis M P ſit obliqua ad hanc virgam, hoc pondus cum vi elaſtica in m in aequilibrio ſubſiſtere queat, et quum hoc valeat quamcunque longitudinem huic virgae tribuamus, etiam aequilibrium ſubſiſtere poterit, dum M m euadit infinite paruum. Praeterea quod Illuſtris *d'Alembert* aſſerit §. 11. Opuſculi citati vires elementares ſecundum M n, $m n$ applicatas cum pondere P in aequilibrio eſſe debere, minime quidem veritati congruit; requiritur autem vt P in aequilibrio ſit cum iſtis viribus, quae ex viribus elementaribus collectim ſumtis oriuntur, et quas ſupra per T et V deſignauimus. Si igitur iſtae vires elementares quae ſupra nobis erant $P\,d s$, $Q\,d s$ nunc per $P'\,d s$, $Q'\,d s$, deſignemus, conſequemur ex §. 3.

$$T = -\operatorname{cof.}\Phi\int Q'\,d s - \operatorname{fin.}\Phi\int P'\,d s;\text{ et}$$

$$V = -\operatorname{fin.}\Phi\int Q'\,d s + \operatorname{cof.}\Phi\int P'\,d s;$$

ideoque pro aequilibrio tantum requiritur vt ſit

$$TT+VV=PP=(\int Q'ds)^2+(\int P'ds)^2,$$

nec non vt directio iſtius vis $\surd(TT+VV)$ directe ſit oppoſita directioni MP, iu quo omnino nihil abſurdi reperitur.

§. 14. Ex ratiocinio igitur Illuſtris *d'Alembert*, licet id expreſſe non affirmet, in eam facile opinionem induci quis poſſet, quod exiſtimauerit inſignis hic Geometra ex actione laminae I m in punctum non vires finitas ſed infinite quaſi paruas emergere, quod autem falſum eſſe nulla eget demonſtratione. Immo vero ſi ſupponamus, quemadmodum in Figura 4, laminam in A muro eſſe infixam, et praeterea nullam aliam vim in hanc laminam agere, quam pondus ad alterum terminum laminae M appenſum, conſideratio iſta virium elementarium nihil ad rem facit, eritque tum ob $\int Q'ds=E$, $\int P'ds=F$,

$$T=-E\,\text{coſ.}\,\Phi-F\,\text{ſin.}\,\Phi \text{ et } V=-E\,\text{ſin.}\,\Phi+F\,\text{coſ.}\,\Phi.$$

Quia nunc vis tangentialis in A euaneſcit, ob ſin. $\Phi=0$ fit $E=0$, hinc $V=F\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $Vv=Fy+C$, vbi facile patebit fore $C=-P.NM$, exiſtente $F=P$. Pro puncto igitur A erit momentum elaſticitatis

$$Vv=G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)=-P.MN$$

et pro quocunque alio puncto $E=-P.MG$. His igitur perpenſis nunc liquet heic non niſi binas occurrere vires, nimirum illam quae ex actione ponderis in laminam elaſticam oritur, ipſamque elaſticitatem laminae; et pro aequilibrio ad punctum extremum M requiritur, vt momentum ponderis P, ſeu P. Mn (Fig. 5.) aequetur momento elaſticitatis $Vv=G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$, ideoque vt ſit radius curuatu-

rae

rae ad punctum M infinitus, tum vero quoque vis tangentialis $T = - P$ ſin. Φ.

§. 15. Quum inſtituti noſtri ratio non permittat vt Illuſtr. *d'Alembert* per omnes ratiociniorum Labyrinthos ſequamur, quibus ex prima commiſſa fallacia plures concluſiones precarias elicit, tamen praetermittere non poſſum, quin obſeruem, maxime iniuſtam eſſe illam ſtricturam Illuſtris *d'Alembert*, qua in §. 25. Opuſculi citati arguit Illuſtres Mathematicos *Eulerum* et *Danielem Bernoullium* in ea fuiſſe opinione, quaſi momentum ponderis reſpectu puncti E, ſeu P. M G proportionale ſit illi quantitati quae Illuſtri *d'Alembert* γ dicitur. Nam primo demonſtrari poteſt Illuſtres hos Mathematicos ſupponere $P. MG = G (\frac{d\Phi}{ds}) = Vv$; non vero item $P. MG = \gamma = (\frac{dV}{ds})$; hunc enim eſſe valorem ipſius γ ex mente Illuſtris *d'Alembert* infra demonſtrabimus. Quaeritur ergo an ſit

$$P. MG = P(MN - DE) = G (\tfrac{d\Phi}{ds});$$

eſt vero ex aequatione pro curua elaſtica

$$MN - DE = - \frac{\sqrt{2}(1 + D\,\text{ſin.}\,\Phi)}{D\sqrt{C}} \text{ ob}$$

$$MN = - \frac{\sqrt{2}}{D\sqrt{C}} \text{ et } DE = \frac{\sqrt{2}(1 + D\,\text{ſin.}\,\Phi) - \sqrt{2}}{D\sqrt{C}}, \text{ hinc}$$

$$G (\tfrac{d\Phi}{ds}) = - \frac{P\sqrt{2}(1 + D\,\text{ſin.}\,\Phi)}{D\sqrt{C}}, \text{ ideoque}$$

$$\frac{d\Phi}{ds} = - \frac{P\sqrt{2}(1 + D\,\text{ſin.}\,\Phi)}{GD\sqrt{C}}; \text{ at eſt}$$

$$\frac{d\Phi}{ds} = \sqrt{2C(1 + D\,\text{ſin.}\,\Phi)},$$

fiet igitur $C = - \frac{P}{GD}$ et $P = - GCD = - AD$, vti ſupra §. 13 quoque inuenimus. Quia igitur eſt $\frac{d\Phi}{ds} = \frac{1}{R}$, facile patet eſſe $GR (\frac{d\Phi}{ds}) = G$, ſeu quantitati conſtanti,

 vnde

vnde quidem ſi γ ſignificaret id quod nobis eſt $G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)=Vv$, recte concluderetur eſſe γR aequalis conſtanti. Tum vero iſta aequalitas ab Illuſtri *d'Alembert* propoſita $\frac{1}{R}(P-\int S\,ds)=\gamma$ §. 15. et 17, minime ſubſiſtere poteſt; quum enim $P-\int S\,ds$ ipſi ſignificet vim tangentialem quae nobis erat T, eſſe deberet:

$$T=-\tfrac{1}{2}G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2+A=G,$$

at ſupra inuenimus

$$-\tfrac{1}{2}G\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2+A=G\left(\frac{d^3\Phi}{ds^3}\right)$$

ideoque eſſe deberet $\left(\frac{d^3\Phi}{ds^3}\right)=1$. Verum facile oſtendi poteſt γ Illuſtri *d'Alembert* idem ſignificare quod nobis per $\left(\frac{d.Vv}{ds}\right)$ indicatur, vel huic quantitati eſſe proportionale, nam apud Illuſtr. *d'Alembert* eſt

$$\frac{ds}{R}(P-\int S\,ds)=\varrho=\gamma\,\alpha^2\,ds,$$

ideoque

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)(P-\int S\,ds)=\gamma \text{ poſito } \alpha^2=1.$$

Ex §. autem 15. patet Illuſtrem *d'Alembert* ſibi perſuaſiſſe quod vis tangentialis exprimatur per $P-\int S\,ds$, quam nos per T expreſſimus, erit igitur $T\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)=\gamma=\left(\frac{dV}{ds}\right)$, vti ex §. 2. conſtat. Heic vero ante omnia notamus vim tangentialem non eſſe $P-\int S\,ds$ ſed $P\,\text{ſin.}\,\Phi-\int S\,ds$, et tum omnino erit

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)(P\,\text{ſin.}\,\Phi-\int S\,ds)=\left(\frac{dV}{ds}\right)=G\left(\frac{d^3\Phi}{ds^3}\right),$$

vnde ſi $\int S\,ds=0$, habetur integrando $-P\,\text{coſ.}\,\Phi=G\left(\frac{dd\Phi}{ds^2}\right)$, quod omnino conſentit cum aequatione noſtra ſupra allata $\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2=2C(1+D\,\text{ſin.}\,\Phi)$. Nunc vero ſi vſus fiat iſtius aequationis $\frac{1}{R}(P\,\text{ſin.}\,\Phi-\int S\,ds)=\gamma$, poſito $\int S\,ds=0$ fit

ſit $\gamma R = P$ ſin. Φ, non vero item $= P$, ad cuiusmodi concluſionem peruenit Illuſtr. *d'Alembert* §. 17. Opuſculi. Praeterea quia vis tangentialis inuenta eſt

$$T = A - \tfrac{1}{2} G \left(\tfrac{d\Phi}{ds}\right)^2 = A - GC(1 + D \text{ ſin.} \Phi)$$

$$= - DGC \text{ ſin.} \Phi = P \text{ ſin.} \Phi$$

nunc oppido liquet vim tangentialem euaneſcente $\int S\, ds$ non per P, ſed per P ſin. Φ exprimi. Immo vero iſta concluſio $\gamma R =$ conſt. ad manifeſta deducit abſurda, dum ponitur

$$\gamma = \left(\tfrac{dV}{ds}\right) = \left(\tfrac{dd.Vv}{ds}\right) = G\left(\tfrac{d^3\Phi}{ds^3}\right),$$

eſſet enim hinc $\alpha\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = G\left(\frac{d^3\Phi}{ds^3}\right)$ quae aequalitas minime ſubſiſtere poteſt, attamen ſi rite conſtaret, nullum eſt dubium quin ex illa legitima aequatio pro figura laminae elaſticae deduceretur. Neque vero melius ſibi conſtat ratiocinium Illuſtris *d'Alembert*, quo in §. 34. ſui Opuſculi demonſtrat eſſe $-\sigma\, ds = d.\gamma R$; quamuis enim lamina ſit inextenſibilis, inde tamen minime inferre licet vim tangentialem prorſus euaneſcere, id quod ex aequatione noſtra 11. §. 2. oppido liquet, nam poſitis ibi viribus P et Q euaneſcentibus fiet

$$T\left(\tfrac{d\Phi}{ds}\right) = \tfrac{T}{R} = \left(\tfrac{dV}{ds}\right) \text{ ideoque } T = R\left(\tfrac{dV}{ds}\right) = \gamma R,$$

vbi ſemper fiet, vti ſupra vidimus, $T = P$ ſin. Φ, deſignante nunc P pondus ad M appenſum.

§. 16. Hinc etiam patet iſta argumenta prorſus fallacia eſſe, quibus Illuſtris Geometra commemoratus demonſtrare conatur, ipſam figuram curuae elaſticae manere indeterminatam. Scilicet quum aequationem pro curua inuentam $y = \frac{\sqrt{2(1 + D \text{ ſin.} \Phi)} - \sqrt{2}}{D\sqrt{C}}$ binae ingrediantur conſtantes

D et

D et C, patet primum pro caſu iſto ſpeciali quo lamina in A muro vel parieti fuerit infixa, ad alterum terminum vero laminae M pondere P onuſta, conſtantes iſtas omnimode determinari, modo cognita habeatur elaſticitas laminae, cui quantitati littera G cenſetur proportionalis, nec non longitudo laminae $= l$ et pondus P. Quum enim inuenerimus $P = -GCD$; fiet $-CD = \frac{P}{G}$. Tum vero pro puncto extremo laminae M computetur arcus s per y expreſſus, et in expreſſione iſta loco y ſubſtituatur eius valor $-\frac{\sqrt{2}}{D\sqrt{C}}$, emerget aequatio l aequalis expreſſioni cuidam quae non niſi quantitates conſtantes inuoluit. Ex hac igitur aequatione, et illa $-CD = \frac{P}{G}$, iam valores ipſorum C, D perfecta cognoſcentur, et Problema omnimode habetur determinatum. Quodſi vero elaſticitas G pro incognita habeatur, ordinata autem $MN = -\frac{\sqrt{2}}{D\sqrt{C}}$ cognita ſit, quae ſtatuatur $= e$, fiet $DC = -\frac{\sqrt{2C}}{e}$, hincque $G = -\frac{P}{CD} = +\frac{eP}{\sqrt{2C}}$. Tum vero ſi abſciſſa $AN = f$ quoque ſupponatur cognita, in expreſſione qua illa per MN et conſtantes repraeſentatur, habebimus aequationem quae praeter cognitas $AN = f$ et $AM = e$ non niſi conſtantes C, D inuoluit, ſiue ſubſtituendo loco D valorem $-\frac{\sqrt{2}}{p\sqrt{C}}$, aequationem ex qua iſta incognita C penitus determinatur. Cognitis vero C et D, innoteſcit quoque ipſum G. Neque pro aliis caſibus virium ad laminam elaſticam AEM adplicatarum difficiliis erit determinationem conſtantium eruere. Tanto magis autem mirari conuenit, Illuſtrem *d'Alembert* in re adeo facile a veritatis tramite aberraſſe, quod ipſum hoc argumentum de determinatione conſtantium pro laminis elaſticis ab Illuſtri *Eulero* in Appendice ad tractatum de Problemate Iſoperimetrico adeo dilucide ſit tractatum, vt nullum prorſus remanere

manere deberet dubium. Quodſi pro curua elaſtica vires in A et M adplicatae penitus ſint incognitae, poſitiones vero tangentium in A et M cognitae ſupponantur, vt et quantitates coordinatarum A N, M N, his quoque datis conſtantes C, D perfecte definiri poſſunt. Nam ex aequatione iſta $\sin.\Phi = y\sqrt{C}(\frac{1}{2}Dy\sqrt{C} - \sqrt{2})$, ſi valores pro y et $\sin.\Phi$ fuerint cogniti, aequatio oritur, in qua non niſi D et C vt incognitae occurrunt, tum vero ob $x = \int dy \tang.\Phi$, ſi in valore ipſius per y vel Φ determinato valores cogniti ipſorum y vel Φ ſubſtituantur, altera orietur aequatio C et D inuoluens, definitisque inde C et D, vires in A et M adplicatae quoque definiri poſſunt.

§. 17. In tota autem hac disquiſitione de figura laminarum elaſticarum praecipua ratio quae Illuſtrem *d'Alembert* in errorem induxiſſe videtur, ex eo profluit fonte, quod praeter neceſſitatem conſiderationem virium elementarium introduxerit. Rigoroſe igitur loquendo quia § 9. Opuſculi citati inuenerat $P\cos.\omega = \sin.\omega\int X\,ds + \cos.\omega\int Y\,ds$, ſi filum elaſticum nullis viribus elementaribus ſollicitetur, tam X quam Y euaneſcunt, eritque igitur $\gamma = X\sin.\omega + Y\cos.\omega = 0$, vid. §. 34. Opuſculi. Quodſi autem fuerit $\gamma = 0$, nullum quidem eſt dubium, quin ſit $d.\gamma R = 0$. Quicquid autem ſignificauerit γ, certum eſt quantitatum σ in binis iſtis locis §. 17. et 34. non idem ſignificare, nam oſtendimus pro priori loco iſtam haberi aequationem: $\frac{P\cos.\omega}{\alpha^2} - \int\sigma\,ds = R\gamma$, quum in poſteriori habeatur $-\int\sigma\,ds = R\gamma$, ideoque ſi pro priori loco vſum faciamus litterae σ', erit $\int\sigma\,ds = \int\sigma'\,ds - \frac{P\cos.\omega}{\alpha^2}$; ideoque etiamſi vis elementaris σ' euaneſcat, non ſequitur euaneſcere quoque

quantitatem σ. Caeterum quia Illuſtr. *d'Alembert* iſtam principalem proprietatem pro elaſticis non penitus negare ſuſtinuit, quod nimirum ſit P. M G proportionale elaſticitati laminae in puncto E, inde mox absque vllo molimine aequatio pro curua elaſtica deducitur. Si enim cum Illuſtri hoc Geometra ſtatuatur $MG = x$ et angulus $AED = \omega$, erit $P.x = G\left(\frac{d\omega}{ds}\right) = \frac{G}{R}$, at poſito elemento curuae ds conſtante eſt $\frac{1}{R} = -\frac{ddy}{ds\,dx}$, ideoque aequatio pro curua elaſtica erit $ddy = -\alpha x\,dx\,ds$, vnde integrando obtinetur $dy = (\beta - \frac{1}{2}\alpha x^2)\,ds$, ex quo fit ſin. $\omega = \frac{dy}{ds} = \beta - \frac{1}{2}\alpha x^2$, hinc coſ. $\omega = \sqrt{(1 - (\beta - \frac{1}{2}\alpha x^2)^2)}$, tumque

$$dy = dx \text{ tang. } \omega = \frac{dx(\beta - \frac{1}{2}\alpha x^2)}{\sqrt{(1 - (\beta - \frac{1}{2}\alpha x^2)^2)}},$$

quae eſt notiſſima aequatio pro curuis elaſticis.

PHY-

PHYSICA.

DE
ORDINE FIBRARVM CORDIS.
Diſſertatio III.
DE
FIBRIS EXTERNIS VENTRICVLI DEXTRI.

Auctore
C. F. WOLFF.

Quantum conſtantiae fibris cordis attribui poſſit.

Quanquam haud ita quidem conſtantem eam, quam nunc traditurus ſum, fibrarum cordis ſtructuram eſſe exiſtimem, vt ſingulas fibras ſingulasque minutiores faſciolas in ſingulis plane easdem reperias corporibus; nam et mira omnino ſtructurae cordis variabilitas inter cauſas illas, ſuperius enumeratas, locum habere poteſt, quibus cognitio ſcilicet cordis difficilis redditur; tamen nec eo

vsque fore, vt ſe diffundat natura opinor, vt non facile primarias ſaltim inſignioresque, et quas peculiari ſuo in cordis actione vſu haud carere canſtabit, faſcias, aut faſciculos, in quouis etiam alio corde reperias et recognoſcas. Maxime id quidem, ſi, quod frequens eſt, eius ſint indolis illae, vt ob aliarum nobiliorum partium conditionem et naturam abeſſe vix poſſint; quod magnum certe momentum in aeſtimanda partium conſtantia eſſe arbitror. Sic nunquam transuerſales fibras conſtringentes coni arterioſi, nunquam infundibuli transuerſas, nec obliquas angulares, aut baſilarem faſciculum partis baſilaris, aut fibulas, quibus ille parieti cordis adnectitur, defuturas eſſe credo, quae, ſi deeſſent, aut aliis locum cederent, natura diuerſis, inutiles illas et vanas redderent partes, quae ipſae porro in vniuerſa cordis actione eximium et neceſſarium vſum praeſtant, neque careri ergo illis poſſe videtur. Minutiores partes, faſciolas faſciculosue, quae, ſi deſint, caetera tamen, quo minus recte ſe habeant, nil obſtet, innumeris, vt fieri ſolet, modis variare poſſe, non ibo inficias. Atque tum quidem tamen exemplum aliquod etiam variabilis huius ſtructurae habere electum operae praetium erit, ex quo, cuiusmodi fere haec ſit, aut qua ratione interdum, vel ſaepe, ſe habeat, id ſaltim intelligi poſſit; maxime in difficillima fibrarum cordis fabrica, cuius vix vmbram hactenus cognitam habemus.

Fibrarum externarum dextri et ſiniſtri ventriculi differentia in vniuerſum. Dextri ventriculi faſciae, faſciculi ſiniſtri.

Inſigniter dextri ventriculi fibrae externae ab externis ſiniſtri, ſi accuratius demum perſpectae illae cum hisce

hiſce comparantur, differunt. Fibrae ventriculi ſiniſtri faſciculos collectae, ſeu funes, efficiunt, craſſiores et fere teretes, primo etiam intuitu ſatis diſtinctos foueis et interſtitiis oblongis, profundis, adipe et celluloſa, vel ramulis vaſorum, repletis. Deinde, ſi minutius cultello aut acu faſciculos ſingulos, ab omni adipe liberatos, indagaveris, alium ab alio, quantum fieri poteſt, remouendo aut diſtinguendo, ramificatos ea ratione hos faſciculos eſſe obſeruabis, vt craſſiores, a filo imprimis cartilagineo anteriori ſiniſtro orti, in plures minores diuidantur, quorum alii cum aliis denuo coniuncti, alii porro diuiſi, fibras denique ſimplices producant, craſſitie fere aequales, teretes, parallelas, per inferiorem ventriculi ſuperficiem maxime et circa apicem diſperſas. Alia ac diuerſa diſtributionis ratio eſt fibris externis ventriculi dextri. Hae faſcias potius, aliae aliis adiunctae, efficiunt, latas, at tenues, variae magnitudinis et figurae, non tam interſtitiis tamen et adipe, vt faſciculi illi ventriculi ſiniſtri, quam ſola potius directione fibrarum, aut ortu et inſertione, a ſe mutuo diſtinctas. Non facilius ſane hae faſciae ventriculi dextri, quam ſiniſtri faſciculi, quin difficilius multo, et obſeruantur et definiuntur. Craſſiores faſciculi imprimis in ſede poſteriori ad baſin adipe et interſtitiis diſtinguuntur; modo vt compreſſi maximam partem ſibi mutuo accumbant. Qui ſi acu ergo in ſingulis ſucceſſiue ſedibus a ſe inuicem remouentur, et interſtitia facile apparebunt et faſciculorum cognoſcentur figurae et ramificationes, vt vel verbis deſcribi tum, ſi operam adhibeas, vel, quod ſatius eſt, icone exprimi et definiri queant. Faſciae contra, nusquam adipe aut interſtitiis continuis ſatis, nec magis quam fibrae ipſae, diſtinctae, vnam, ſi in vniuerſum

ſum conſiderantur, cohaerentem et quaſi continuam carnem referre videntur, in qua vix quidquam praeter vniverſalem fibrarum ductum diſtinguas. Hae ergo, niſi diſtinctis acu perquiſitisque ſingulis ſucceſſiue fibris, et, vbi cognitae quaelibet ſunt, continuo in iconem translatis, vt vere ſe habent, definiri nunquam poterunt, non magis, quam ipſae fibrae, quarum diuerſo ductu, aut ortu, aut inſertione et fine, illae imprimis ſunt diſtinguendae.

Caeterarum cordis partium fibrae in vniuerſum pariter vel faſciatim, vel faſciculatim, diſpoſitae.

Similique omnino ratione cum caeteris, tum cordis totius, tum ſinuum, fibris omnibus reſpectu diſpoſitionis earum comparatum eſt. Vel faſcias, illae planas, vel teretes collectae faſciculos, efficiunt, plerumque ramificatos. Nec alia vlla ratione diſpoſitae in vlla parte cordis vel regione inueniuntur; nec mixtum facile vtrumque genus fibrarum in vna parte aut regione obſeruatur; vt ſingulae partes regionesque diuerſae cordis totius alterutro horum generum fibrarum efficiantur. Faſciculatim internae vtriusque ventriculi fibrae diſpoſitae ſunt, ordine quidem difficiliori intellectu in dextro, faciliori multum magisque perſpicuo in ſiniſtro, ventriculo. In vtroque, ramificati, ſicut notum eſt, faſciculi et copioſis anaſtomoſibus coniuncti frequentes ſunt, et pulcherrima imprimis in ſiniſtro ventriculo reticularis ſtructura notabilis eſt. Sinuum fibrae externae in faſcias collectae ſunt diſtinctiſſimas. Sic in facie anteriori ſinus ſiniſtri, ſic in poſteriori, reperiuntur. Sic pariter in vtraque ſinus dextri ſuperficie diſpoſitae ſunt. Auricula dextra in latere dextro et in conue-

xa

xa ſua anteriori ſuperficie faſciculos habet. At iſti interni ſunt, nullis tecti fibris in hac ſede externis, quae caeteras ſinus et auriculae partes faſciatim tegunt, in ſola hac ſede deficiunt. Internae ſinus ſiniſtri egregiis, quas efficiunt, faſciis omnem ſuperficiem internam ſinus obducunt. In ſolo dextro ſinu faſciae cum faſciculis mixtae eſſe videntur. Si vero accuratius res conſideratur, apparet, in ſola auricula faſciculos, faſcias contra in omnibus iis ſedibus eſſe, quae ad ſinum pertinent. Id ipſum vero in ſinu quoque ſiniſtro obſeruatur. Faſciis ſinus, auricula faſciculis, inſtructa eſt. Modo vt magna auricula dextro, parua ſiniſtro, cum ſit adiuncta ſinui; plusquam dimidia pars fibrarum ſinus dextri in faſciculos collecta ſit, maxima longe ſiniſtri in faſcias; nec vllus in hocce faſciculus, niſi parua auricula aperiatur, appareat. Internae ergo ſinuum fibrae faſciatim in ſinu vtroque ipſo, faſciculatim in auricula vtraque diſpoſitae ſunt.

Faſciarum faſciculorumque et fibrarum complicatio in vniuerſum. Duplex complicationis genus. Per extremitates. Per latera fibrarum.

Haec propria ergo et ſingularis fibrarum cordis et ſinuum in vniuerſum diſpoſitio eſſe videtur. Altera etiam magis multo notabilis proprietas earum intricatiſſima connexio eſt, qua inter ſe mutuo fibrae iunguntur. Haud ſolis hae faſciae faſciculique ventriculorum cordis et ſinuum extremitatibus ſuis, principio et fine, nec iis ad vnam, omnibus communem, et a muſculis ipſis diuerſam partem, velut in caeteris fere corporis humani muſculis ſolitum eſt, adhaereſcunt; vt illaeſis fibris vel fibrillis

faſciculus a faſciculo, faſcia a faſcia, fibraque a fibra, a principio ſuo ad finem vsque, ſecundum longitudinem ſolui et ſeparari queat. Vix pars eſt faſciculi aut faſciae, vix punctum in vniuerſa eius ſuperficie, quo non faſciculus cum ſuo vicino faſciculo, aut faſcia cum faſcia, fibraque cum fibra, aliquo modo connecteretur. Ad duplex in vniuerſum opinor genus importunum hunc, quamuis minus perſpectum, anatomicis nexum, quo omnes cordis et ſinuum fibrae non complicantur modo inter ſe, ſed fere coaleſcunt, et qui tantas peperit cognoſcendi has fibras earumque naturam et ordinem difficultates, reduci poſſe. Alterum eſt, quo finibus ſuis faſciculi fibrarum, aut faſciae, in quas fibrae colliguntur, aut faſciolae minores, quibus ſaepe maiores faſciae conſtant, non in vnam aliquam, omnibus communem, et ab iis diuerſam, partem, ſed inter ſe mutuo ipſas, coniunguntur; vt alia ab alia faſciola orta in aliam ſe inſerat, faſciculus alius ab alio productus in alium porro tranſeat faſciculum; alterum, quo ſingulae fibrae, ſiue mediae fuerint faſciae aut faſciculi cuiusuis, quae eum efficiant, ſiue extremae vtrinque, quae limites faſciculi aut faſciae deſcribunt, lateribus ſuis inter ſe et cum proximis ſibi cohaerent aut connectuntur; vt ſingulae fibrae non modo, ſed faſciae et faſciculi quoque, et quaecunque ob diuerſam figuram nomina partes, quas coniunctae fibrae efficiunt, obtinere poſſint et ſoleant, ipſae hac poſteriori ratione nexus inter ſe mutuo coniungantur.

Faſciae faſciolaeque, per extremitates variis modis connexae. Serratim.

Variis nunc modis, tum qui ſingulas inter fibras obtinet, nexus efficitur, tum quo faſciae et faſciculi complican-

plicantur. Faſciae nonnunquam ita aliae in alias tranſeunt, vt extremitates fibrarum vnius alterius fibrarum extremitatibus ſerratim interponantur; quemadmodum faſciculis notum eſt eiusmodi ſerratis vel dentatis pectoralem minorem oriri, ſerratumque anticum maiorem principiis interponi ſimilibus dentatis oblique deſcendentis muſculi abdominis. Haud tamen frequentiſſimum hoc ſerratae coniunctionis genus eſſe videtur. Notabile exemplum in ipſa, qua dextri ventriculi fibrae externae ab externis ſiniſtri in ſuperiori cordis facie diſtinguuntur, leni hac, quaſi impreſſa, crena vidi. [*a*] Lata hic faſcia fibrarum, longitudine et latitudine inſignium, quae ad faſciam magnam infundibuli pertinet, ſub ipſum emergentem ex carne ſecundum ramum arteriae coronariae ſiniſtrae [*b*] acutis dentatisque fibrarum finibus alii ex ſiniſtro ventriculo faſciae, eiusque fibrarum principiis ſimilibus, ea ratione occurrit, vt fines illius acuti acutis huius principiis alternatim interponantur, dentesque alterius faſciae alterius dentes inter ſe recipiant. Simile quid, obſcurius tamen, in angularium fibrarum faſcia [*c*] apparet, vbi in minores illa faſcias [*d*] ſic tranſit, vt, niſi accuratius inquiras, continuare fibrae vnasque continuas efficere faſcias videantur. Omnino tamen aliquid ſerratae interruptionis in his ſedibus obtinet; qua peculiaris quaedam ſutura in medio ventriculo dextro efficitur, haud plane diſſimilis illi,

 qua

[*a*] Tab. I. 17. 17. 17. 89. 89.
[*b*] Tab. I. h.
[*c*] Tab. I. 26. 30.
[*d*] Tab. I. 27. 31.

qua dextri et ſiniſtri ventriculi fibrae externae in ſuperiori cordis ſuperficie connectuntur.

Pennatim porro.

Interdum pennatim fere faſciolae aliae ad alias ſe applicant, vt oblique earum fibrae concurrentes, angulum formando acutum, vel in ſe mutuo ipſas, vel in mediam aliquam faſciolam, aut fibram latiorem, inſerantur; cuiusmodi exemplum prope baſin arteriae pulmonalis in hoc quidem corde exſtat; vbi ab ipſa huius arteriae baſi ortae fibrae breues [*a*] oblique in aliam latiorem [*b*] deſcendunt fibram ex altera parte, magis ductu transuerſam; ex altera faſciola [*c*] fibris ſuis in eandem fibram latiorem fere adſcendit. Plura dantur exempla, vbi ex ſolo altero latere in aliquam inſigniorem fibram aliae tenuiores pennatim inſeruntur; veluti in quibusdam faſciolis ventralibus, ad ſuturam ventriculi dextri concurrentibus, apparet [*d*].

Aut obſcuriori continuationis interruptione.

Aliud, a ſerrato et pennato aeque diuerſum, coniunctionis genus et ſingulare eſt, quo fibrae faſciae vnius in alterius faſciae fibras fere continuant, vt tamen impreſſionibus quaſi ſingularibus, aut interruptionibus, quae ſaepe haud totam fibram, ſed dimidiam eius partem tantum, afficiunt, alteramque omnino partem continuare ſinunt, et

[*a*] Tab. I. 1.
[*b*] Tab. I. 2. 3.
[*c*] Tab. I. 7.
[*d*] Tab. I. 40. 44.

et altera manifeſto faſcia ab altera, et fibrae alterius ab alterius fibris diſtingui, et limites inter fines praecedentis faſciae principiaque ſequentis dignoſci, queant. Nobile huius generis exemplum in ponticulo exiſtit, ſeu faſcia fibrarum inſigni lataque, e dextro ventriculo ſuper arteriam coronariam ſiniſtram in ſiniſtrum tranſeunte ventriculum, eamque tegente arteriam [*a*]. In ea, quamuis vna faſcia eſſe videatur, ex altero in alterum ventriculum producta, tamen interruptiones, in ſedibus aliis fibrarum manifeſtae, alibi leuiores impreſſiones, faciunt, vt duas facile diuerſas faſcias eſſe cognoscas, in ſe mutuo fere continuatas, dextri ventriculi alteram priorem [*b*], alteram ſiniſtri [*c*]. Tum fibrae quoque in hoc ipſo exemplo occurrunt [*d*], quae dimidiam partem interruptae, dimidiam omnino continuatae, in ſiniſtrum ventriculum tranſeunt, eiusque ſe fibris intermiſcent. Aliaque plura exempla in eadem crena, ventriculos diſtinguente, tum etiam in ea ſutura ſe offerunt, qua in media ſuperiori ſuperficie ventriculi dextri fibrae interrumpuntur.

Maxime obliqua aliarum in alias inſertione.

Longe omnium tamen frequentiſſimum complicationis faſciarum genus eſt, quo diuerſa fibrarum directione incedentium iuxta ſe mutuo duarum faſciarum altera ſub alteram ſe recipere videtur, vel potius altera ſe applicat faſcia ad alteram; vel etiam, ſi eodem hactenus fibrarum

 ductu

[*a*] Tab. I. z. 9. 10. 87.
[*b*] Tab. I z. 3. 7. 8. 9. 10.
[*c*] Tab. I. 87.
[*d*] Tab. I, 9.

ductu ad ſe mutuo duae faſciae progreſſae fuerint, mutato ductu altera ad alteram ſe applicat, in eamque ſe inſerit; vel flexis denique fibris altera ab altera oritur. Quicunque horum caſuum obtineat, eam ſemper faſciae ſic connexae faciem prae ſe ferunt, ac ſi pars alterius faſciarum, principium ſiue finis, ab altera faſcia tecta et abſcondita eſſet, et aliae faſciae ſub alias ſe recipere, vel aliae aliis incumbere videntur. Copioſa exempla in ventriculo dextro, imprimis in facie eius ſuperiori, tum vero in ſinu etiam ſiniſtro, in eius interna ſuperficie, occurrunt. Sic altera faſciola angularis [*a*] ad alteram [*b*] ſe applicat. Sic prima ventralium faſciarum [*c*] ſub angularem [*d*] ſe fibris ſuis recipere videtur. Sic multae ventralium aliae [*e*] ſub alias [*f*] ſe abſcondunt. Et aliae porro in iis ſub aliis prodire et in conſpectum venire videntur [*g*]. Denique exempla etiam ſunt, vbi manifeſtius apparet, non vere, vt videntur, tranſire fibras aliarum faſciarum ſub alias, ſed applicare ſe potius ad eas; velut in faſcia, quae circum coni arterioſi dextrum latus flexa ſub baſi arteriae pulmonalis anterius in conſpectum venit [*h*] et in latus faſciolae alicuius anguſtae [*i*] oblique ſe inſerit.

Nexus

[*a*] Tab. I. 31.
[*b*] Tab. I. 27.
[*c*] Tab. I. 24. 32.
[*d*] Tab. I. 29. 24. 30.
[*e*] Tab. I. 38. 51. 53.
[*f*] Tab I. 37. 49. 51.
[*g*] Tab I. 53. 55. 56.
[*h*] Tab. I 5.
[*i*] Tab. I. 2.

Nexus faſciculorum per extremitates.

Faſciculos teretes ſiue cylindricos vbi fibrae collectae efficiunt, alia et facilior obtinet ratio complicationis. In ramos, plerumque duos tantum [*a*], rarius in tres vel quatuor, [*b*] faſciculi finduntur, qui ſecedendo a ſe mutuo etiam alios complectere ſolent, ſub ipſa trunci diviſione emergentes [*c*]. Tum alii ad alios ſe rurſum applicant rami [*d*] cum iisque vel laminas paſſim efficiunt, [*e*] ſeu faſcias, quae tamen minus quam illae, de quibus antea dictum eſt, a ſe inuicem ſunt diſtinctae, vel, quod maxime fit, fibras iterum fiſſi rami demum producunt, [*f*] teretes ſatisque craſſas et firmas, aequales, maximam partem parallelas, nonnullis tamen in ſedibus etiam diſcedentes a ſe mutuo, furcam fingendo, aliasque emergentes inter eas fibras includendo. Sic in ſiniſtro potiſſimum ventriculo fibrae externae connectuntur. Copioſior ramificatio et anaſtomoſis multo frequentior in internis ventriculorum faſciculis eſt; et eo hic nexus efficitur intricatior, cum non in eodem plano, velut in externo ſtrato, faſciculi, ſed in diuerſas partes, et diſtribuuntur et coniunguntur, vt cauernoſa fere in dextro ventriculo ad apicem angulumque et marginem baſilarem, egregia retiformis in ſiniſtro, inde formata ſtructura exiſtat. In auricula dextra cancellati faſciculi, ex faſcia baſilari orti, dum adſcendunt, partim ramis vtrinque emiſſis inter ſe connectuntur, partim

---

[*a*] Tab. I. 62. 72. 73.
[*b*] Tab I. 64.
[*c*] Tab. I. 73.
[*d*] Tab. I. 72. 83.
[*e*] Tab. I. 84.
[*f*] Tab. I. 85. 86.

tim extremitatibus ſuis in arcum ſuperius tranſeunt, quo cum caeteris huius non modo, ſed et ſiniſtri ſinus ſibris, communicant.

Per latera fibrarum nexus. Nexus per fibrillas obliquas.

Sic faſciae ergo et faſciculi extremitatibus ſuis inter ſe mutuo complicantur. Iam ſingulae vtrorumque fibrae, tum quae mediae imprimis faſciculum faſciamue efficiunt, tum quibus extremis vtrinque faſciculus quisque aut faſcia cum ſuis vicinis faſciculis aut faſciis contingit, variis non minus inter ſe connectuntur modis. Longe omnium quidem vulgatiſſimum eſt, quod fibrillis is nexus tenuiſſimis, quibus ipſae fibrae conſtant, efficiatur, oblique ab altera quarumcunque vicinarum fibrarum ſecedentibus, in alteram inſertis. Nimirum a dextris ad ſiniſtra fibrae, faſciatae pariter dextri ventriculi, ac faſciculatae ſiniſtri, in ſuperficie cordis ſuperiori, in inferiori a ſiniſtris ad dextra, apicem verſus oblique progrediuntur. Iam quaelibet fibra, dexterior in communi progreſſu, ex latere ſuo ſiniſtro fibrillas ſpargit continuo, in fibram, ſiniſterius ſibi vicinam, eiusque in latus dextrum, oblique tranſeuntes. Quaelibet in communi progreſſu ſiniſterior easdem, a dexteriore ſibi oblique accedentes, in latere ſuo dextro recipit, continuatasque ſecum in communem directionem producit. Vt fibrae ventriculi dextri, quae proximae ſua obliquitate transuerſali ductui ſunt, fibrillis vbique nectantur obliquis, ſiniſtrorſum retrorſum, ſeu verſus baſin, ex qualibet apici propiore fibra in vicinam, baſi propiorem, adſcendentibus; ventriculi contra ſiniſtri fibrae, quae longitudinali ductui propiorem obliquitatem habent, trans-

verſis

verſis fere fibrillis, ſiniſtrorſum ex qualibet dexteriori fibra vel faſciculo in ſiniſteriorem tranſeuntibus, iungantur. Vnum ſolum exemplum in hoc corde reperi, definitae huic vniuerſali fibrillarum directioni manifeſto contrarium. In ventriculo ſiniſtro id fuit, vbi ſingularis lamella ſolitas quidem fibrillas tegere videbatur, fibrillis facta, egregie diſtinctis, oblique dextrorſum decurrentibus, quae ſecundum ordinem, vbique caeterum obſeruatum, ſiniſtrorſum omnino pro hac faſciculorum, quos nectunt, directione deſcendere debuiſſent.

Manifeſto ex fibra in fibram continuatas, aut ortas ex altera, in alteram inſertas.

Maxime hic ſingularum fibrarum nexus per vniuerſam cordis ſuperficiem externam regnat. Nec minus idem in faſcias, quam in faſciculos, collectis fibris familiaris eſt; vt in ſiniſtro proinde aeque et dextro ventriculo locum vbique habeat, et exempla vbique, imprimis tamen in ſuperiori illorum ſuperficie, inuenias [*a*]. Aliquam, haud notatu indignam, in eo nexu differentiam reperi, maxime in dextro ventriculo, vbi intricatiſſimus nexus eſt. Manifeſto alibi fibrillae nectentes ex fibrae fibrillis alterius in alterius continuant fibrillas, vt maxime in faſcia infundibuli magna apparet [*b*], in cuius latioribus validioribusque fibris et firmiores diſtinctioresque fibrillae ſunt nectentes, et facilior omnino nexus obſeruatu et definitu. Hae qui-

[*a*] Tab. I. 11. 14. 15. 16. 18. 63. 65. 68. 74. 77. 79.
[*b*] Tab. I. 11. 14. 14. 14.

quidem in ipſa paſſim extrema ſuperficie fibris intactis ab alia in aliam fibram declinare fibrillae nectentes et abludere obſeruantur. Alibi fiſſura tantum duas a ſe inuicem fibras diſtinguens percipitur, quae, quamuis tenuiſſima, aliquam tamen notabilem profunditatem habet, vt fibram alteram in his ſedibus ab altera acu vel cultro ſeparare, ſatisque remouere, et foueam inter eas, quo vsque fiſſura continuat, efficere, vel potius detegere, liceat, in qua tum demum fibrillae nectentes apparent, quibus, quae ſolutae in ſuperficie fibrae videbantur eſſe, connectantur. Hae profundiores fibrillae non tam manifeſto continuare cum fibrillis, quibus fibrae conſtant, ſed, ortae potius ab latere fibrae vnius, in alterius fibrae latus inſertae, proprium nectentium fibrillarum genus eſſe videntur. Copioſa harum etiam exempla vbique, at manifeſta imprimis in parte infundibuliformi ventriculi dextri, occurrunt [*a*]. In ſiniſtro ventriculo vbicunque, maiores praecipue ad baſin, faſciculi, vel rami eorum, a ſe mutuo diſcedunt, vt interſtitia includant, vel vbi contiguos diduxeris pauliſper a ſe inuicem faſciculos, fortes magnasque inuenies fibrillas nectentes [*b*]. Difficilius inter fibras teretes aut planas huius ventriculi prope apicem et iuxta ſeptum fibrillae deteguntur, quae arctius quippe compactae quaſi fibrae firmiusque cohaerent, et frequentius confluunt.

Fibrillae muſculoſae ſunt, non celluloſae.

Haud recte *Hallerus* dubitat, veraene hae fibrillae carneae, an fila potius ſint celluloſa. Taceo ruborem, quem

---

[*a*] Tab. I. 15. 16.
[*b*] Tab. I. 63. 65. 68. 74. 77. 79.

quem parem in iis et in fibris obſerues. Neque prouoco ad continuationem, qua fibrillas ipſas easdem alicuius fibrae ab hac fibra ſecedere, in alteram tranſire, ad eamque nunc porro pertinere, et hac ſui parte, qua ex altera in alteram tranſeunt, nectentes fibrillas efficere manifeſto in plurimis ſedibus vides. Nego, quidquam his fibrillis cum tela celluloſa commune eſſe. Inordinata haec eſt, fila cum lamellis miſcens, et planis potius laminis quam filis conſtans. Si fila fuerint, in omnes plagas ſine ordine ducta, longiora breuioribus, craſſioribus tenuiora, intercedunt. Fibrillae contra, ſimillimae inter ſe et aequales, in eadem ſede non modo, ſed in vniuerſa cordis ſuperficie externa, omnes in vnam eandemque, ordinatam ad fibras, quas nectunt, directionem progrediuntur. Denique haec celluloſae, musculos inuoluentis, natura et diſpoſitio eſt, vt vaginas efficiat pro vniuerſo musculo non modo, vniuerſales, ſed pro ſingulis maioribus minoribusque faſciculis, et denique pro fibris quoque tenuiores, quibus, vt faſciculi, ſic ſingulae fibrae, et inueſtiuntur, et a ſe mutuo diſtinguuntur. Nihil huius ſimile in fibris cordis eſt. Solam externam ſuperficiem cordis tenerrima, niſi in quibus ſedibus adipem continet, celluloſa occupat, tenuem ei adnectendo membranam externam. Tum vbi interſtitia in ſuperficie inter magnos faſciculos in ſiniſtro inprimis ventriculo verſus baſin inueniuntur, ea cum adipe replet. Inter fibras ipſas, interve faſciculos, vt inuoluat eos, diſtinguatque a ſe mutuo, vel inter faſcias demum, nusquam penetrat. Atque haec ipſa quidem propria cordis, et ab omnibus musculis diuerſa, natura eſt, vt fibrae inter ſe ipſae cohaereant, nulla celluloſa diſtinctae. Plura etiam alia argumenta ſunt, quibus certum eſt, vere carneas, non

 cel-

celluloſas, eas fibrillas, fibras cordis connectentes, eſſe; quibus tamen vberius rem adeo manifeſtam demonſtrare omnino haud operae pretium eſſe exiſtimo.

Fibrarum nexus per coalitionem inordinatam.

Alius modus, quo ſingulae fibrae cordis inter ſe cohaerent, eſt, dum fibrae, quae per aliquam ſuae longitudinis partem diſtinctae hactenus fuerunt, nunc confluunt et coaleſcunt, vnamque quaſi fibram latiorem efficiunt. Vix infrequentior iſte illo nexu eſſe videtur, quo fibrillis fibrae inter ſe iunguntur. Occurrit in fibris angularibus ventriculi dextri [*a*] imprimis in fasciis partis infundibuliformis [*b*] et maxime in iis ſiniſtri ventriculi fibris, quae, a ſepto ortae, ſuperiorem eius ſuperficiem occupant propius ſepto [*c*]; vbi continuam in multis ſedibus carnem efficiunt, vix fibris vllis, aut fibrillis viſibilibus, diſtinctam. Maximam haec complicatio et coalitio fibrarum in delineatione earum et definitione difficultatem parit; cum vllius vix fibrae ad aliquam longitudinem notabilem vsque certam videas continuationem eſſe, nec ductum, quo progrediatur; cumque alias oriri, euanescere alias, videas, nec, vbi oriantur aut euanescant, certe conſtet. Eaque ipſa complicatio eſt, quae in his dictis ſedibus non ſolum, vbi imprimis regnat, ſed alibi quoque, vbi mixta cum aliis nexus modis inuenitur, etiam dum ab his non ſatis diſcernitur, maximam definiendi difficultatem et incertitudinem adferre ſolet.

Per

[*a*] Tab. I. 25. 29.
[*b*] Tab. I. 8. 13.
[*c*] Tab. I. 94. 95. 96.

Per reticularem coalitionem.

Haec quidem, quam dixi, fibrarum coalitio inordinata eſt, nec ad certas diſtantias fibrae aut certis in ſedibus coaleſcunt, vt aliqua inde certa ſtructura oriatur. Diuerſa ergo coalitionis fibrarum ſpecies eſt, quae aliis in ſedibus, in ventriculo ſiniſtro, imprimis in ſinibus, obſeruatur, vbi fibrae per certa, eaque exigua, et inter ſe aequalia interualla vtrinque cum ſibi vicinis ea ratione contingunt confluuntque, vt quaelibet fibra quibus punctis altero ſuo latere cum altera vicina fibra cohaeret, mediis inter ea punctis altero latere cum altera cohaereat fibra vicina; vt rete ſic formetur arctum, fibris ſerpentinis, interſtitiis fere rhomboideis, anguſtis, paruisque, nec longitudine multum puncta cohaeſionis, nec latitudine fibrarum latitudinem, ſuperantibus. In ventriculo ſiniſtro inter fibras teretes, tum et inter ipſos ramos faſciculorum paſſim hunc nexum reperi; imprimis tamen in faſciis baſilaribus ſinuum, maxime in partibus earum anterioribus, [*a*] vbi fibrae tenerrimae transuerſim ſerpentino ductu progrediendo alternatim arcubus ſuis vtrimque cum vicinis fibris cohaerent, reteque efficiunt pulcherrimum, at arctum, interſtitiis adeo paruis, vt inermibus oculis obſeruari reticularis ſtructura vix poſſit. Ob hanc rem exprimere eam in icone non potui.

Modi nexus fibrarum alii, inter deſcriptos medii.

Denique occurrunt nexus exempla quoque, in medio quaſi loco inter duos eorum, quos hactenus explicui, modos poſita; vt, vtrum ad alterum eorum potius, an ad alte-

[*a*] Tab. I, I.

alterum genus nexus, referenda ſint, dubites. Dum faſciae finibus ſuis coniunguntur, hoc ita nonnunquam efficitur, vt partim obſcure ſerratam, partim interruptam continuationem, eam coniunctionem vocare, vel in medio potius inter vtramque referre, poſſis; vti in faſciis ventralibus [*a*] contingit. Dum altera faſcia oblique ad alteram ſe applicat, ita ſaepe prioris faſciae fibrillae diſperſae in aliquam huius poſterioris faſciae fibram latiorem inſeruntur, vt dubius ſis, obliquaene faſciae in faſciam inſertioni hunc nexum, an fibrarum complicationi per fibrillas, accenſeas. In ventralibus pariter faſciis ventriculi dextri hoc accidit paſſim [*b*]. Tum notabile exemplum inter faſcias apicis ventriculi eiusdem occurrit, vbi fibrillae [*c*], ab alia faſciola [*d*] ortae, in aliam [*e*] partim inſertae, partim in aliam [*f*] continuatae, mirum et vix extricabilem nexum efficiunt. Et ſimile fere exemplum in parte infundibuliformi prope ſeptum apparet; dum latior aliqua fibra [*g*] faſciae alicui vicinae [*h*] fibrillis partim adnectitur, partim ab ea oriri videtur. Et aliud in angularibus, dum ipſa prima, quae in ſuperiori cordis ſuperficie appa-

[*a*] Tab. I. 26.

[*b*] Faſciae [Tab I. 40. 41.] diſperſis fibrillis in faſciolam [Tab. I. 35.] inſeruntur, vt non tam faſciae in faſciam inſeri, quam potius fibrillis fibrae alterarum faſciarum cum alterius fibris connecti videantur.

[*c*] Tab. I. 50. 52.

[*d*] Tab. I. 52. 54.

[*e*] Tab. I. 50. 47.

[*f*] Tab. I. 53.

[*g*] Tab. I. 20.

[*h*] Tab. I. 27.

apparet, angularium fibrarum, in tenues reſoluta fibrillas, [*a*] ad poſtremam latam infundibuli fibram [*b*] ita ſe applicat, vt fibrillis has fibras connexas pariter, atque angularem in hac ſede faſciam ad faſciam infundibuli ſe oblique adiungere, putari queat. Denique inter faſciculos quoque ventriculi ſiniſtri exemplum notari meretur, vbi fibrillae, [*c*] quae ſolito modo duos faſciculos [*d*] coniungunt primo, deinde ex eodem altero [*e*] horum, quo prius erant, faſciculorum ortae, nouum collectae efficiunt faſciculum [*f*], quem vel tanquam ramum, variis radicibus ex priori faſciculo [*g*] ortum, adeoque cum eo coniunctum, vel tanquum faſciculum, fibrillarum ope cum eodem connexum, conſiderare licet.

Fibrae in variis partibus cordis variis his, quaelibet ſuis, modis connectuntur.

His ergo potiſſimum modis fibrae, imprimis externae ventriculi dextri et ſiniſtri, tum et internae mediaeque, et ſinuum fibrae externae et internae, in variis ſuis partibus quaelibet, et in ſedibus variis, regionibusque inter ſe mutuo connectuntur. Variis enim omnino et propriis, ſicut demonſtratum eſt, et in ſingularum partium per-

[*a*] Tab. I. 18.
[*b*] Tab. I. 19.
[*c*] Tab. I. 77.
[*d*] Tab. I. 72. 73.
[*e*] Tab. I. 72.
[*f*] Tab. I. 78.
[*g*] Tab. I. 72.

pertractatione demonſtrabitur, modis variae non modo partes cordis, ſed variis iſtae in variis ſedibus quoque, fibras inter ſe connexas habent. Alia facies longe externis fibris reſpectu nexus huius in dextro ventriculo, alia in ſiniſtro eſt; alia ventriculi vtriusque in inferiori ſua, alia in ſuperiori, ſuperficie. Et aliter denique ventriculi dextri ſuperficies ſuperior in parte baſilari et infundibuliformi, aliter in ventrali et prope apicem, fibras, aliter ſiniſtri ventriculi ſuperior ſuperficies ad baſin, aliter ad ſeptum et apicem verſus, ordinatas complicatasque habet. Sic aliter in anteriori, aliter in poſteriori, ſinuum ſuperficie fibrae externae, aliter eaedem inferius, aliter in media parte et ſuperius, aliter multo internae dextri ſinus, aliter ſiniſtri, inter ſe mutuo connectuntur. Quos hactenus ergo definiui, his variis modis fibrae variarum cordis partium in variis ſuis ſedibus et regionibus complicantur, vt cuilibet fere parti, aut regioni, peculiare genus fibrarum ſit, peculiari modo connexarum. Et ſaepe in vna ſede diuerſis modis connexae fibrae ſunt, dum et faſciae aut faſciculi, quos collectae efficiunt, ſimul inter ſe mutuo, et fibrae ſingulae, fibrillis aut coalitione inordinata, vel reticulari, connectuntur; quemadmodum in vniuerſa vtriusque ventriculi ſuperficie ſuperiori apparet. Saepe etiam vna ſola ratione vniformi in vniuerſa aliqua parte fibrae connexae ſunt, velut in faſciis baſilaribus ſinuum, quae integrae, nec diuiſae vllo modo in faſciolas, ſolas fibras ſuas ſola hac vbique reticulata coalitione connexas habent. In internis contra ventriculorum et auricularum ſuperficiebus ſolos faſciculos, in quos fibrae collectae ſunt, finibus ſuis, ramificatos coniunctosque varie, inter ſe complicatos eſſe conſtat, fibris variorum faſciculorum ſingulis

ne celluloſa quidem vbique connexis; cum magna faſciculorum tenuium craſſiorumque pars ſeparata prorſus circumquaque per cauitatem tranſeat, ſolisque extremitatibus ſuis ventriculorum parietibus adhaereſcat.

Ortus et inſertio fibrarum externarum ventriculi dextri in vniuerſum. Limites ventriculi in externa ſuperficie.

Limites, quibus in externa cordis ſuperficie ventriculus dexter circumſcribitur, ſeu circumferentia externa, in tres partes, ſitu et natura diuerſas, diſtribui poteſt. Earum altera, ſuperior, illa crena eſt, a baſi ad apicem per mediam ſuperficiem ſuperiorem cordis excurrens, qua dextri ventriculi fibrae externae ab externis ſiniſtri diſtinguuntur [*a*], quae ſepto intus reſpondet, et quam marginem quidem ſepti ſuperiorem Ill. *Senacus* vocare ſolet, quamque in tunicato etiam corde arteria ſuo itinere deſignat coronaria ſiniſtra. Altera inferior eſt, latior ſtria potius quam crena, per inferiorem cordis ſuperficiem a baſi ad apicem producta [*b*], qua in hac regione vtriusque ventriculi fibrae externae diſcernuntur, quae pariter hic ſepto reſpondet, et quam inferiorem ſepti marginem *Senacus* vocat. Tertia poſterior, difficilior, in baſi eſt. Haec non vnam rectam, vt binae priores, ſed tres potius diuerſas, extremitatibus ſuis inter ſe iunctas, lineas curvas, ſeu concauas, quarum duae quidem, ſuperior [*c*] et media

[*a*] Tab. I. C. D.
[*b*] Tab. III. B. C. D. F.
[*c*] Tab. I. C. I. Tab. II. I. F. 9.

media [*a*] minores, tertia inferior [*b*] longe maior eſt, refert; et quae totidem diuerſis partibus applicatae diuerſos tres limites efficiunt minores ventriculi dextri, ſingulatim eum ab vnaquaque partium illarum diſtinguentes. Ad baſes nimirum arteriae pulmonalis, aortae, et ſinus venarum cauarum his ſuis limitibus, ad formam illarum excifis, ventriculus ſe applicat; eaeque baſes ergo, quo vsque parietem ventriculi recipiunt, ſua figura ſuaque poſitione et ſitu hanc lineam eiusque ductum definiunt, qua parte circumferentiae ſuae poſteriori in baſi cordis ventriculus dexter terminatur.

Limites in baſi cordis accuratius deſcripti.

Baſis quidem arteriae pulmonalis tota fere ab adhaerente pariete ventriculi complexa occupatur [*c*], vt exigua modo particula eius in latere ſiniſtro ſuperſit, quae ſepto inſidere videtur [*d*]; proinde integrum fere circulum haec ſuperior in poſteriori circumferentiae ventriculi parte excifio efficit. Aortae baſis tertiam quaſi ambitus ſui partem dexteriorem anterioremque largitur, [*e*] minoremque ergo hanc mediam circumferentiae ventriculi exciſionem reddit. Longe ampliſſima tandem et figura fere ellyptica inferior ſitu dexteriorque ſimul exciſio eſt, quam baſis in ventriculi circumferentia efficit ſinus venarum

[*a*] Tab. II. B. L. Z.
[*b*] Tab. II. Z Y. Tab. III. D. E.
[*c*] Tab. II. I. F. 9.
[*d*] Tab II. I.
[*e*] Tab. II. B. L. Z.

rum cauarum [a], quae toto ſcilicet ambitu ſuo ventriculi parietes recipit, excepta minima parte in latere ſiniſtro, qua cum ſinu venarum pulmonalium hic dexter ſinus contingit. In duas autem partes rectius hic ambitus baſis ſinus et ipſa parietum ventriculi exciſio diuiſa putatur, fere rectilineas, anteriorem ſeu ſuperiorem [b], ad ſuperiorem cordis ſuperficiem ſpectantem, et poſteriorem ſeu inferiorem [c], ad planam reſpicientem ſuperficiem cordis, in latere dextro in ſe mutuo continuatas. Partem anteriorem filum occupat cartilagineum dextrum anterius, poſteriorem poſterius. Et filis his ergo potius, ſi accurate dicendum eſt, quam baſi ſinus dextri ipſa, parietes ventriculi in hac ſede terminantur. vt tamen per baſin ſinus et ductus definiatur filorum et exciſionis parietum ventriculi figura.

Ortus fibrarum in vniuerſum.

Poſtquam origines ſemel fineſque fibrarum externarum ventriculi dextri accurata indagatione reperti perſpectique et definiti ſunt; nihil, vt fieri ſolet, ſimplicius tum quidem nihilque facilius his ipſis eſſe videtur, quas tantis tamen tenebris ante, aut minus diligenti adhibita inquiſitione, aut nimia ſubtilitate quaeſitis, quae nullae erant, difficultatibus, obtectos et abſconditos eſſe credebamus. Oriuntur a duabus deſcriptae circumferentiae ventriculi externae partibus, poſteriori [d] et inferiori [e],

Hh 2 inſer-

[a] Tab. II. Z. Y. Tab. III. D. E.
[b] Tab. II. Z. Y.
[c] Tab. III. D E.
[d] Tab. II. I F. 9. B. L. z. y. Tab. III. D. E.
[e] Tab. III. D. F.

inſeruntur in tertiam, quae ſupereſt, ſuperiorem [*a*]. Oriuntur ergo a baſi arteriae pulmonalis ab eius nempe latere ſiniſtro [*b*], a maxima parte ſiniſteriori faciei anterioris [*c*], et a poſteriori huius baſis facie [*d*]; deinde ex foſſa triangulari [*e*], quae inter hanc baſin et baſin aortae eſt, quaeque oriundas fibras ab arteriae pulmonalis baſi in mediam partem anteriorem baſis aortae ducit. Inde tum fibrae porro ab hac dexteriori dimidia parte faciei anterioris, et a latere dextro, baſis aortae oriri pergunt [*f*] ad eam ſedem vsque, vbi nodulus ei cartilagineus dexter [*g*] adhaeret. Tunc porro a toto filo cartilagineo anteriori dextro [*h*] oriuntur, et ab interſtitio inter anterius et poſterius filum [*i*], quo vsque illud ad anteriorem ſinuum faciem ſpectat; et porro ab interſtitio eodem, qua parte hoc circa latus dextrum ſinus dextri flexum in ſuperficiem poſteriorem continuat, et a toto filo cartilagineo poſteriori dextro [*k*], ad eam ſedem vsque, vbi coniunctum hoc cum filo poſteriori ſiniſtro inter contiguos ſinus penetrando ſe abſcondit. [*l*] Hinc denique, apicem verſus linea ortus flexa, a tota ſtria oriuntur,

---

[*a*] Tab. I. C. D.
[*b*] Tab. I. x.
[*c*] Tab. I. x. y. 1. 2.
[*d*] Tab. II. F. 9.
[*e*] Tab. I. 8. 9.
[*f*] Tab. I. B. L. z.
[*g*] Tab. I. z.
[*h*] Tab. I. z. Y.
[*i*] Tab. I. Y.
[*k*] Tab. III. E. D.
[*l*] Tab. III. 4.

vntur, quae in cordis ſuperficie inferiori ſecundum longitudinem dextrum a ſiniſtro ventriculo diſtinguit [a].

Progreſſus et inſertio fibrarum in vniuerſum.

Sic a maiori longe circumferentiae ventriculi externae parte fibrae externae ortae, in vnam ſuperiorem vix tertiam eius partem, in crenam, quae in conuexa cordis facie ventriculos diſtinguit, inſeruntur. Hinc variis in ſedibus verſus crenam tranſeundo faſciae faſciolaeque et fibrae inter ſe mutuo concurrunt, inque ſe mutuo, antequam ad crenam perueniunt, inſeruntur [b]. Et aliae porro, quae in hoc itinere ex prioribus nihilo minus, a circumferentia ortis, quaſi nouae, oriuntur, vt pariter coarctatae cum aliis concurrant, pariterque in ſuo itinere finiantur, [c] neceſſe eſt. Sic variis directionibus faſciae, in ſuperiori imprimis ventriculi ſuperficie, vbi demum, et quae inferius a regione ſepti, et quae ab vtraque, anteriori et poſteriori, baſis ſinus dextri parte erant ortae, concurrunt, progrediuntur. Oblique aliae ſiniſtrorſum a baſi verſus apicem deſcendunt, [d] aliae recta tranſverſim ad crenam tranſeunt, [e] aliae denique verſus baſin inclinatae oblique omnino adſcendunt [f]. Caeterum, quamuis ex aliis aliae ſatis frequentes faſciae faſciolaeque,

 nec

[a] Tab. III. 4. D. F.
[b] Tab. I. 24 32 33.
[c] Tab. I. 38.
[d] Tab. I. 13. 14. 15. 17. 17. 17.
[e] Tab. I. 24. 32. 35.
[f] Tab. I. 36. 39. 40.

nec ſingulae ergo a dictis circumferentiae partibus, oriantur; ſimiliterque in alias multae, quae non ad crenam perueniunt, inſerantur; communis tamen omnium et primarius ortus eſt in partibus illis circumferentiae ad baſin cordis et ad regionem ſepti in ſuperficie cordis plana, inſertio communis in crena, ſeu regione ſepti, in ſuperiori cordis ſuperficie. Quae enim ex faſciis faſciae, ex iis tamen, oriuntur, quae ipſae a partibus illis circumferentiae ortae erant. Quae inſeruntur in faſcias, in eas certe, quae ipſae ad crenam perueniunt, inſeruntur. Vt omnibus ergo communis illa primaque origo, omnibus communis et vltima haec inſertio omnino adſcribi poſſit.

Diſtinctae dextri a ſiniſtri ventriculi fibris tam in ſuperiori quam inferiori cordis ſuperficie ſunt.

Alia vero in communi hac fibrarum externarum ventriculi dextri inſertione in crenam, tum etiam in origine a ſtria, qua regio ſepti in plana cordis facie deſignatur, difficultas occurrit. Non ita quidem fibrae externae ventriculi dextri in conuexa cordis ſuperficie ſuper crenam recta in ſiniſtrum continuant ventriculum, quemadmodum *Louerus* eas et *Winslowus* continuare affirmant, vt nullum in externa ſuperficie inter dextri et ſiniſtri ventriculi fibras diſcrimen eſſet; tum enim et crenam nullam et nullum in hac ſede regionis ſepti indicium apparere oporteret; ſed nec adeo tamen in crena vbique fibrae diſtinctae interruptaeque ſunt, ſicut Illuſtris *Senacus* in icone ſua pingi curauit, vt vna continua vbique aequalis et profunda crena ſit, qua finitae omnino dextri ventriculi fibrae a nouis orientibus ſiniſtri diſtinguerentur.

Sin-

Singulari modo paſſim, velut ſerrata quaſi ſutura, manifeſto ſunt diſtinctae. [*a*] Alibi interrupta fibrarum continuatione diſtinguuntur pariter. [*b*] Videntur in ſedibus nonnullis leuiori ſaltim impreſſione dextrae a ſiniſtris fibrae diſtinctae eſſe. [*c*] Alibi manifeſto ex altero in alterum ventriculum continuant. [*d*] Quaeritur ergo, et dubium omnino eſſe videtur, vtrum potiſſimum continuatae ex dextro in ſiniſtrum ventriculum fibrae, an finitae in crena dextri, ſubortae nouae ſiniſtri, dicantur? Si prius eſt, nullae propriae dextri ventriculi, nullae ſiniſtri, dantur externae; vno eodemque ſtrato vterque communi includitur ad mentem *Winslowi*. Si poſterius eſt, quilibet proprias ſuas fibras habet, vti Illuſtris *Senaci* ſententia eſt. Dari fibras nonnullas, quae manifeſto ex dextro in ſiniſtrum tranſeant ventriculum, negari non poteſt. Verum enim et magna pars tamen manifeſto in ipſa crena peculiari et euidenti ſuo modo finitur, et plurimae earum, quae tranſire videntur, ita ſubiectae carni tamen peculiariter in crena adhaerent, vt et punctum fixum in ea obtineant et continuatam in his ſedibus efficiant crenam, quae nulla appareret, quaeque deleta eſſet, ſi omnino liberae fibrae tranſirent. Et nullum porro de origine fibrarum ventriculi dextri a ſtria latiore, quae in plana cordis ſuperficie ſepti regionem deſignat, dubium eſt, vbi nulla fibra ex altero in alterum ventriculum continuat, vbi, primis principiis a coniunctis potius filis cartilagineis petitis, ſecundum longitudinem ſtriae primum decur-

[*a*] Tab. I. 17. 17. 17.
[*b*] Tab. I. 3. 9. 10.
[*c*] Tab. I 55. 56. 102.
[*d*] Tab. I. 45. 46.

decurrere fibrae ventriculi dextri, tum ſingulis in ſedibus flexae ſuper ventriculum continuare, videntur; vt diſtinctiſſimae ſeparatiſſimaeque in hac inferiori ſtria fibrae dextri ventriculi a fibris ſint ventriculi ſiniſtri. Denique fac, plures continuare in crena fibras; cum longius tamen non procurrant, ſed cito euanescant, inſinuando ſe inter fibras ventriculi ſiniſtri; quid obſtat, quominus tamen proprias cuique ventriculo fibras eſſe dicas, quae eum agendo contrahunt, nec quidquam faciunt ad alterius contractionem? etiamſi non ſingulae in ipſa crena finiantur, ſed paulo longius procurrendo inaequalem, aut vacillantem, vel etiam dubiam et incertam, hanc lineam inſertionis efficerent? Rectius ergo omnino *Illuſtris Senacus* proprias vnicuique ventriculo fibras externas aſſignauit. Sed in promtu quoque, his expoſitis argumentis, iconisque, quam in tabula I. addidi, comparatione, eſſe arbitror, iudicare, non modo, quaenam illarum ſententiarum vero ſit propior, ſed etiam, quo factum ſit modo, vt Viri magni in tam diuerſas diſceſſerint ſententias. Si enim, vti *Winslowus* fibras repraeſentat externas cordis, marſupii iſtae inſtar vnius continui ventriculos binos includerent; qui diſtinctas propriasque cuique ventriculo credere et deſcribere potuiſſet *Illuſtris Senacus*? Qui marſupium ſibi commune imaginari potuiſſet *Winslowus*, ſi adeo diſtinctae fibrae eſſent, vti *Senacus* eas in iconibus ſuis pinxit?

Vera crenae in ſuperiori ſuperficie natura.

Vt meam vero de crenae huius, vel lineae, vera natura, vtrum finitis fibris ventriculi dextri nouisque ſiniſtri ſubortis, an alia quacunque ratione oriatur, quo minus vere forſitan communium fibrarum continuatio interrupta eſſet,

eſſet, ſententiam dicam; ita, mihi quidem, cum interrupta illa, cuius in ſuperioribus etiam mentionem iam feci, et quae maximam crenae partem efficit, continuatione comparatum eſſe videtur, vt fibrae ventriculi dextri, omnino terminatae, finibus ſuis fibris ſiniſtri, earumque ſuperficiei externae, incumbant, iisdemque ſic ſint adnatae, et porro coalitae cum iisdem eo vsque, vt nonnullis in ſedibus plane videantur in easdem continuare, in aliis manifeſta indicia, alibi leuiora veſtigia modo, vix vmbra demum alibi, huius coalitionis ſuperſit. Sic iis ergo in ſedibus non modo, vbi interrupta continuatio illa, in ſuperioribus definita, locum habet, ſed vbi prorſus quoque continuare fibrae videntur, et vbi ſerratim contra dextri ventriculi fibrae cum fibris ſiniſtri coniunctae ſunt porro, ſuperſtratas hac explicata ratione dextri ventriculi fibras finibus ſuis fibris ſiniſtri, adglutinatasque et coalitas cum iis eſſe putandum eſt. Cuique nimirum interſtitio inter duas fibras ventriculi ſiniſtri fibra ſuo fine incumbit innataque eſt dextri, vbi ſerrata earum coniunctio datur. Fibrae contra fibra incumbit, vbi vel interrupta continuatio eſt, vel omnino fibra in fibram continuat. Ergo cicatrix haec crena, mea ſane ſententia, eſt, fines fibrarum inter ventriculi dextri et fibras continuatas ſiniſtri ſuborta, magis alibi, alibi minus, obſoleta.

Striae, quae ſepti regionem in inferiori cordis ſuperficie indicat, deſcriptio.

Longe diuerſa origo eſt fibrarum ventriculi dextri in inferiori plana cordis ſuperficie. [a] Non crena hic da-

[a] Tab. III. B. C. D. F.

datur, quaſi impreſſa, aut linea ſimplex, qua fibrae finitae ſiniſtri ventriculi ab orientibus dextri diſtinguerentur; ſed lata omnino ſtria eſt longitudinalis; pollicem integrum latitudine poſterius ad baſin, dimidium in media parte et anterius prope apicem, aequans, plana, compacta, carnea, in qua fibrae aegrius diſtinguuntur, quantum tamen diſtingui poſſunt, longitudinali ductu a baſi ad apicem decurrunt. In huius marginem ſiniſtrum fibrae ventriculi ſiniſtri, oblique a baſi verſus apicem deſcendendo, angulis admodum acutis, continuae tranſeunt. Dextri, transuerſim fere dextrorſum progredientes, e margine dextro angulis fere rectis continuae pariter, at flexae e ductu, quem in ſtria habebant, longitudinali, oriuntur. Miror, nec ſatis intelligo, qui fieri potuerit, vt tanquam ſimplici linea, velut in ſuperficie conuexa, in hac plana quoque, diſtinctas fibras ſiniſtri ventriculi a fibris dextri, caeterum vtrasque eodem plane obliquitatis gradu progredientes, deſcripſerit pariter et pinxerit *Illuſtris Senacus*; niſi aliter forte longe in aegrotorum cordibus coctis, quam in recentibus ſanorum hominum cordibus, quibus vſus ſum, fibrae apparent. Hoc certum eſt, nihil in ſanis et recentibus eſſe, quod cum icone *Illuſtris Senaci*, qua inferiorem cordis nudi ſuperficiem repraeſentat, poſſit comparari; adeo diuerſa in omnibus fere natura eſt ab icone et adeo haec facies ſingularia habet, qua ſe ab indeterminata ſimplice fibrarum expreſſione, quae ſola in ea icone exſtat, diſtinguat. Oriuntur a prima parte fili cartilaginei poſterioris dextri hae fibrae longitudinales, quae ſtriam efficiunt, [*a*] deinde a media inter vtrumque, dextrum et ſiniſtrum, filum poſterius, parte [*b*], qua coniuncta ra-

[*a*] Tab. III. 53.
[*b*] Tab. III. 7.

ramum producunt anaſtomoticum [*a*], denique a magna craſſiore parte fili cartilaginei poſterioris ſiniſtri [*b*]. Flexuoſo ductu hinc et vndulato latae craſſaeque fibrae verſus apicem progrediuntur, ſaepe aliis ſuper alias tranſeuntibus, diſcedentibus ſaepe binis aliis a ſe mutuo, denuoque coniunctis, inſulas quaſi formantibus incluſas, criſpamque pasſim ſuperficiem ſtriae facientibus [*c*]. Quae primae dexterius a filo cartilagineo dextro in ſtriam deſcendunt, ipſum marginem eius prope baſin efficientes dextrum, primae quoque deſerunt ſtriam, dextrorſum flexae [*d*] ad angulum fere, vt monui, rectum, in fibras transuerſim abe vndo dextri ventriculi. Inde quo oriuntur ſiniſterius ex filis, longiorem in ſtria partem ſucceſſiue percurrunt, vlterioresque, marginem occupando dextrum, a caeteris pergentibus diſcedunt, fibrasque efficiunt apici propiores ventriculi dextri [*e*]. Vnde continuo amiſſis fibris anguſtior ſtria redditur. Ad ipſum apicem in aliquot craſſas fibras diſtinctas caudae equinae inſtar vltimae diſperguntur [*f*], quae pariter dextrorſum flexae fibras apicis producunt.

Deſcriptio ſingularum faſciarum. Earum enumeratio.

Haec diſpoſitio ergo, hic nexus, hic ortus et finis, fibrarum externarum ventriculi dextri in vniuerſum. Tranſeo ad enumerationem deſcriptionemque ſingularum faſciarum.

[*a*] Tab. III. 4.
[*b*] Tab III. 6. 6.
[*c*] Tab. III. 76. 77. 78.
[*d*] Tab. III 55.
[*e*] Tab. III. 7. 63.
[*f*] Tab. III. 72. 74. 75.

rum. Sunt octo fibrarum faſciae, ſeu claſſes, in quas maxime puto et aptiſſime diſtingui poſſe fibras vniuerſas, quae externam ventriculi dextri ſuperficiem efficiunt. Quae ſcilicet et ortu ductuque et fine inter ſe differant, et notabiles ſint vſu, vel alia aliqua proprietate inſigni, et quas tandem, quod equidem haud minoris momenti eſſe arbitror, maxime cenſeo eſſe conſtantes. Iis ſequentia impoſui nomina, quibus ſi meliora inueneris, auferre iſta, meliora imponere licet. Sunt ergo interim: 1.) Fibrae circumflexae ſiniſtrae [*a*]. 2.) Fibrae pulmonales anteriores [*b*]. 3.) Fibrae interiectae infundibuli, ſiue faſciola infundibuli minor [*c*]. 4.) Fibrae circumflexae dextrae ſuperiores, ſeu pulmonales poſteriores [*d*]. 5.) Fibrae circumflexae dextrae inferiores, ſiue aorticae [*e*]. Poſſes etiam muſculum circumflexum dextrum minorem illum, hunc maiorem appellare. 6.) Faſcia infundibuli magna [*f*]. 7.) Faſcia angularis, ſeu fibrae angulares [*g*]. Denique 8.) Faſcia ſeu fibrae ventrales [*h*]. Poſſent his accenſeri 1.) faſciola quaedam, quae pontis inſtar e dextri ventriculi ſuperficie in ſuperficiem ſiniſtri ſuper crenam, ſuperque arteriam coronariam ſiniſtram, interrupta quidem continuatione, tran-

---

[*a*] Tab. I. x.
[*b*] Tab. I. 1. y. z. 2, 3.
[*c*] Tab. I. 7.
[*d*] Tab. I. 4.
[*e*] Tab. I. 5. 6.
[*f*] Tab. I. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20.
[*g*] Tab. III D. E. G. Tab. I. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31.
[*h*] Tab. III. D. G. F. Tab. I. M. 33. 34. etc. vsque ad 58. D.

tranſit [*a*]. 2.) Faſcia ſatis ſpectabilis in apice ventriculi, ſingularibus fibrarum directionibus inſignis [*b*]. Sed illa ex fibris conſtat, non propriis, ſed iisdem, quae ad alios iam ordines recenſitae ſunt, quae continuatione ſui coniunctae hunc pontem efficiunt. Notari tamen haec ventriculorum communis fasciola meretur. Poſterior apicis faſcia, quin ſatis conſtans ſit, dubito, et ſatis ſemper a caeteris fasciolis ventralibus diſtincta. Ergo arbitrio cuiusuis potius, vtrum tanquam ſingularem faſciam apicis eam, an vti partem faſciae ventralis conſiderare malit, relinquo.

Deſcriptio. Fibrae circumflexae ſiniſtrae. Tab. I. x.

Primum ergo ordinem fibrae faciunt circumflexae ſiniſtrae [*c*]. Hae a latere imprimis ſiniſtro baſis arteriae pulmonalis, tum etiam a fibris porro ordinis ſecundi, quae ab anteriori parte baſis arteriae pulmonalis oblique ſuper crenam tranſeunt, oriuntur. Deſcendunt inde oblique ſiniſtrorſum et, flexae arcuatim verſus baſin partim, partim verſus interiora cordis, in ſupremam partem crenae inſeruntur. Quae primae, in ipſo arteriae latere ſiniſtro ortae, in ipſam inſeruntur crenae extremitatem [*d*], breuiſſimae ſunt, et vix duas longitudine lineas ſuperant. Quae inde magis anterius ex baſi arteriae oriuntur [*e*], paulatim longitudine augentur, vt pollicem longiſſimas aequare

 in

[*a*] Tab. I. z. 3. 9. 10. 87.
[*b*] Tab. I. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58.
[*c*] Tab. I. x.
[*d*] Tab. I. C.
[*e*] Tab. I. x.

in alio corde viderim. Quae tum porro ex latere ſuperiori fasciolae obliquae pulmonalis oriuntur, denuo ſenſim decreſcunt. Nimirum parua eſt in hoc corde, cuius iconem exhibui, ſiniſterior haec, quam fibrae circumflexae ſiniſtrae efficiunt, coni arterioſi portio. Eandem multo longiorem craſſioremque, et fibras ipſas latiores et numero auctas, in aliis reperi cordibus, et pulmonales fibras magis apicem verſus deſcendentes, quo plus loci concedatur fibris circumflexis et altitudini in hoc latere ſiniſtro coni arterioſi. Sic et ſpecioſior conus formatur et plures fibrae dantur circumflexae, quae ex latere fasciolae pulmonalis oriuntur. His fibris circumflexis ſiniſtris conus arterioſus in latere ſiniſtro cordi alligatur, vt, dum ipſe conus vna cum arteria pulmonali antrorſum reflectitur, orificium arterioſum oblique verſus apicem ventriculi ſiniſtri reſpiciat, et inflexio ergo maxima in latere dextro, minor inde continuo ſiniſterius, minima et vix vlla demum in latere fiat ſiniſtro ipſo. Satis profunda tamen foſſula eſt, quae inter latus coni ſiniſtrum et arteriam coronariam deſcendentem craſſitie coni et fibris his circumflexis, quae ad eum pertinent, eumque efficiunt, producitur, et inſigniter hac parte ſua ſuprema, cono arterioſo, ventriculus dexter prae ſiniſtro in ſuperiori ſuperficie eminet. Diſtinctiſſimae caeterum fibrae ſunt circumflexae ſiniſtrae in ſuperficie externa, lataeque et craſſae apparent. Profundius inter ſe cohaerent fibrillis breuiſſimis et arctis.

Fibrae pulmonales anteriores. Tab. I. y. z. 1. 2. 3.

Fibrae pulmonales anteriores in media fere facie anteriori arteriae pulmonalis ab eius baſi oriuntur, inſignem et plus quam dimidiam latitudinis arteriae collapſae partem occu-

occupando, [a] vt vna quarta quaſi vtrinque ſuperſit, ſiniſterius pro circumflexis ſiniſtris, dexterius ſpatio in baſi libero ab adhaeſione fibrarum relicto. Sic eam ipſam ſedem ſuperflue pulmonales fibrae, cum circumflexis ſiniſtris coniunctae, tegunt, cui valuula intus ſemilunaris anterior in arteria pulmonali ſua baſi adhaeret, quamque tuber, a ſinu expreſſus [b], in icone baſi ſua indicat. Hinc fibrae latae ergo, pulchre diſtinctae, oblique ſiniſtrorſum et antrorſum, verſus apicem, ſic ductae defluunt in hoc corde [c], vt propiores ſint transuerſalibus; in alia, quam coram habeo, icone longitudini cordis propriores ad crenam oblique deſcendunt. Tum ſingularis in hoc corde nexus inter eas fibras obtinet. Quae prima earum dexterius eſt, latiſſima [d], magisque caeteris transuerſa, ad crenam progreditur. In eam caeterae, minus transuerſae [e], inſeruntur, cum eaque continuant ad crenam [f] praeter vltimas, circumflexis ſiniſtris vicinas [g], quae ſe illi adiungunt [h]. In alio corde idem non reperi, in quo parallelae hae fibrae, licet connexae, ad crenam progrediebantur; quare etiam pro conſtanti ordine illa fibrarum coniunctio haberi non poteſt. Vbi ad crenae regionem perueniunt ſuper arteriam coronariam ſiniſtram [i] ſu-

---

[a] Tab. I. y. 1. 2.
[b] Tab. I. S.
[c] Tab. I. z. 3.
[d] Tab. I. 2. 3.
[e] Tab. I. 1.
[f] Tab I. 3.
[g] Tab. I. y.
[h] Tab. I. z.
[i] Tab I. c. d. e.

ſuperque crenam [*a*] quam illa occupat, in ſiniſtrum ventriculum ex dextro tranſeunt; eiusque fibris ſe immiſcent [*b*], partem fasciae efficiendo, quae pontis inſtar illam arteriam tegit [*c*]. Non prorſus autem continuae tranſeunt, ſed aliquo modo in ea ſede interruptae, vbi dexter ventriculus a ſiniſtro diſtinctus terminatur; antequam arteriam coronalem attingunt; vt nouae, eaeque ſiniſtri ventriculi, fibrae arteriam potius tegere videantur. Prima, ſuperior, ſiue poſterior, fibra [*d*] omnino continuat in hoc corde; reliquae, ſicut in plurimis crenae ſedibus, eam fere faciem prae ſe ferunt, acſi fibrarum ventriculi dextri fines ſuperſtrati fibris ventriculi ſiniſtri et adnati eſſent [*e*] adeo, vt magis alibi, alibi minus, cum iisdem coaluerint, magisque in aliis ſedibus, in aliis minus, veſtigia huius reliquerint coalitionis, quemadmodum in ſuperioribus dictum eſt. Connexionem fibrarum fere pennatam in hac fasclola eſſe dixi. Id quidem in hoc ſe ita habet corde. Vbi fibrae parallelae magis progrediebantur, inordinata potius coalitione inter ſe mutuo paſſim cohaerebant; vt ſaepe, quae aliquo vsque duae fibrae fuerant, in vnam confluerent, haud altera illarum latiorem, quae vna prius exſtiterat fibra, in duas diuideretur, non minores, et aliqua tamen huius pennatae, quam in hoc corde repereram, coniunctionis imago ſimul in inordinata illa coalitione appareret.

Fibrae

[*a*] Tab. I. L.

[*b*] Tab. I. z. 3. 87. 88.

[*c*] Tab. I. 87.

[*d*] Tab. I. z.

[*e*] Tab. I. 87.

Fibrae interiectae infundibuli. Tab. I. 7.

Fibrae interiectae infundibuli mediam partem ſuperficiei anterioris infundibuli ſub media baſi arteriae pulmonalis et ſub fibris pulmonalibus anterioribus occupant [*a*]. In hac ſede interiectae ſunt dictis pulmonalibus fibris et circumflexis inferioribus dextris ex parte altera, ex altera faſciae infundibuli magnae [*b*]. Etiam haec non minus conſtans eſſe videtur faſciola, quam fibrae circumflexae ſiniſtrae et pulmonales anteriores. Nam fibrae circumflexae dextrae arcum formando in pulmonales anteriores inſeruntur; faſcia infundibuli contra magna parallela pulmonalibus ad crenam progreditur. Sic interſtitium efficitur inter fibras pulmonales et infundibuli faſciam, quod quibus repletur fibris, hae interiectae erunt. Oriuntur a circumflexis dextris inferioribus [*c*] latae longaeque fibrae, paſſim in tenniores diuiſae, videnturque ſub illis circumflexis quodammodo prodire. Progrediuntur ductu, analogo baſi arteriae pulmonalis et fibris pulmonalibus, fere vndulato. Deſcendunt ita oblique a dextris verſus ſiniſtra et apicem verſus, vt propiores ſint transuerſalibus pro ſitu cordis, omnino transuerſae reſpectu infundibuli conique arterioſi ductusque arteriae pulmonalis. Tranſeunt denique interrupta continuatione ſuper crenam et arteriam coronariam ſiniſtram in fibras ventriculi ſiniſtri [*d*] pari ratione atque dictum eſt de fibris pulmonalibus anterioribus. Applican-

[*a*] Tab. I. 7.
[*b*] Tab. I. 8. 8. 16. 20.
[*c*] Tab. I. 5.
[*d*] Tab. I. 87.

plicantur ergo et innaſcuntur finibus ſuis his fibris ſiniſtri ventriculi, antequam arteriam coronariam attingunt, in ipſo ductu crenae. Et mediam partem pontis efficiunt, qui dextrum cum ſiniſtro ventriculo coniungit. Fibrillis hae fibrae inter ſe mutuo connectuntur. Maxime quidem manifeſto ſuprema, ſeu quae baſi cordis caeteris propior eſt, cum ima pulmonalium coniungitur ea ratione, vt reſoluta in fibrillas his ipſis fibrillis oblique in illam pulmonalem fibram tranſeat, [a] et in pulmonalem ergo omnino faſciam partim pennatim, partim in mediam partem pontis, vti ſuperius dictum, haecce faſciola interiecta inſeratur. Quae ſequuntur inferiores, ſeu apici propiores, huius faſciolae fibrae fibrillis pariter connexae ſunt, ſed profundioribus, quae ſeparatis paulisper a ſe inuicem fibris demum apparent. Dixi interiectam hanc faſciolam, ſeu fibras interiectas, propterea, quod non a communi principio oriuntur, ſed a circumflexis dextris, pulmonalibus anterioribus et infundibuli faſcia magna includuntur, et a principio communi ſeparantur; proinde quaſi interiectae ſunt his fibris et faſciis dictis. Minor autem faſciola infundibuli appellari poteſt, cum ad infundibulum pertineat, et minor ex duabus fit, quae dantur.

Circumflexae dextrae ſuperiores. Tab. I. 4. Tab. II. 9. 9. 10.

Vltima tantum, eaque minori et anguſtiori parte circumflexus dexter ſuperior muſculus, ſeu fibrae circumflexae, ſeu pulmonales poſteriores, in anteriorem ſiue ſuperi-

[a] Tab. I. 3.

periorem cordis ſuperficiem prodit, [a] maxima parte poſterius infra baſin arteriae pulmonalis in poſteriori ſuperficie coni arterioſi ſitus. [b] In duas hic partes diuiſus eſt: ſuperiorem, [c] quae longior et anguſtior proxime ſub baſi arteriae conum circumdat, et inferiorem, [d] breviorem latioremque. Illa ea ipſa eſt, quae continuata, circa dextrum latus coni flexa, in anteriori ſuperficie in conſpectum venit [e]. Haec in poſteriori iam coni ſuperficie finitur. A baſi poſterius arteriae pulmonalis fibris pauciſſimis, continuo tranſuerſim productis, reliquis ex foſſa triangulari, [f] quae inter arteriam pulmonalem et aortam eſt, in ſuperioribus deſcripta, pars longa circumflexi dextri ſuperioris oritur. Inde parallela baſi arteriae, coronae inſtar per totam faciem poſteriorem, latusque dextrum et partem anterioris faciei, orificium arterioſum ventriculi dextri ambit, partemque ſupremam poſterius et dexterius efficit coni arterioſi. Praeter pauciſſimas, vnam vel alteram, ſupremas fibras, quae a media, in poſteriori facie, arteriae pulmonalis baſi oriuntur, continuo hinc tranſuerſim et parallelae ad baſin progrediendo, nulla, neque in hac poſteriori ſuperficie arteriae, neque in latere dextro, fibra a baſi eius arteriae oritur. Sola ergo, anterior quam occupat valuula, pars in baſi arteriae originem fibris, pulmonalibus nempe anterioribus, ſuppeditat. Cui valuula dextra reſpondet, cui poſterior, hae liberae

 ſunt

[a] Tab. I. 4.
[b] Tab. II. 9. 9. 10.
[c] Tab. II. 9. 9.
[d] Tab. II. 10.
[e] Tab. I. 4.
[f] Tab. II. 8. 9.

ſunt partes ab adhaeſione fibrarum. Cinguntur transuerſalibus circumflexis. Inſeritur tandem pars longa circumflexi ſuperioris oblique [a] in fibram infimam pulmonalium anteriorum [b], quae ſingulari in hoc corde latitudine gaudet. Altera huius muſculi portio, inferior et breuior, a tota reliqua parte poſteriori orae foueae ſupradictae triangularis [c], ad mediam baſin aortae vsque, cui ſua baſi fouea accumbit, fibris egregie diſtinctis oritur; vt totam origine ſua foueae oram dextram ab apice ad baſin vsque circumflexus muſculus occupet. Inde parallelae fibrae fibris portionis longae et orificio arterioſo ventriculi in poſteriori coni ſuperficie, transuerſales pro cono et pro infundibulo, dextrorſum progrediuntur, reſpectu corporis, cum totum infundibulum oblique ſiniſtrorſum adſcendat, dextrorſum oblique et ſurſum in hac poſteriori coni facie, vt totus muſculus, ducuntur. Inſeruntur fibris inferioribus quibusuis, breuioribus, ad proximas ſuperiores, continuo longiores, applicatis, in latus ſiniſtrum circumflexi dextri inferioris, [d] qui a parte poſteriori et inferiori antrorſum oblique dexterius iuxta ſuperiorem circumflexum adſcendit. Profundius fibrae fibrillis arctiſſimis breuiſſimisque inter ſe mutuo cohaerent. Totus, quemadmodum eum deſcripſi, muſculus omnino conſtans eſſe videtur.

Circum-

---

[a] Tab. I. 4.
[b] Tab. I. 3.
[c] Tab. II. 8.
[d] Tab. II. 11. 12.

Circumflexae dextrae inferiores Tab. II. 12. 13. 14. 15. 16. Tab. I. 5.

Alter circumflexus dexter, inferior, dexterius iuxta priorem ſitus, [*a*] quem etiam aorticum, vel, ſi mauis, fibras circumflexas dextras inferiores, vel aorticas, appellare poſſes, non minus elegans et ſpectabilis muſculus eſt. Occupat ſitu partem magnam ſiniſteriorem latioremque regionis baſilaris [*b*] ex qua latiſſimus, et figura fere pyramidalis, extremitate tenuiore [*c*] ſuper marginem baſilarem in ſuperficiem ſuperiorem cordis adſcendit, eaque ſola extremitate in illa apparet [*d*]. Etiam hic in duas muſculus circumflexus, vt prior, diuiſus eſt portiones, quarum altera ſiniſterior, minor [*e*], vicina circumflexo ſuperiori, altera dexterior eſt et maior [*f*]. Illa tota in parte baſilari abſoluitur. Haec ſola eam partem anguſtiorem producit, quae in ſuperiorem cordis ſuperficiem adſcendit, circumflexo ſuperiori applicata. [*g*] Figuram ſcilicet minor portio triangularem habet, vt baſi ſua baſi inſideat aortae [*h*], indeque ſenſim extenuata ad marginem vsque adſcendat baſilarem. Sic cunei inſtar in regione baſilari ſuae maiori portioni et circumflexo ſuperiori interiecta eſt, easque ad marginem vsque baſilarem a ſe

 mutuo

[*a*] Tab. II. 12. 13. 14. 15. 16.
[*b*] Tab. II. H. L. 14. 16.
[*c*] Tab. II. 14. 16.
[*d*] Tab. I. 5.
[*e*] Tab. II. 12. 13. 14.
[*f*] Tab. II. 15. 16.
[*g*] Tab. I. 5.
[*h*] Tab. II. Q. R.

mutuo ſeparat. Tunc maior vero portio, arcuatim ſuper marginem ducta, extremitate ſua anguſtiore ſe applicat ad longam circumflexi ſuperioris portionem [*a*], cum eaque in ſuperficie ſuperiori cordis coniuncta apparet [*b*]. Oritur portio minor a parte dextra faciei anterioris baſis aortae et a latere dextro. Hinc latae conſpicuae fibrae flexuoſae, oblique dextrorſum latitudinem partis baſilaris percurrendo ſucceſſiue ſe applicant ad circumflexum ſuperiorem [*c*]. Quae primae ſiniſterius, breuiores cum breui portione illius concurrunt, in eandemque inſeruntur; [*d*] quae deinde dexterius ſequuntur, longiores, apicem formando in ipſo margine baſilari ad longam ſe adiiciunt portionem [*e*]. Portio maior paulo poſterius iuxta priorem a latere dextro baſis aortae, et ab exigua parte faciei poſterioris, deinde porro a nodo cartilagineo dextro et primo principio fili cartilaginei anterioris dextri originem ducit [*f*]. Imprimis fibrae ex angulo inter latus baſis aortae dextrum et filum cartilagineum quaſi effundi videntur, compreſſae in ipſo angulo, dein velut in ventrem diffuſae, hinc denuo, vbi ad marginem perueniunt baſilarem, coarctatae, in longamque productae caudam. [*g*] Vbi ortae ſunt magnum continuo arcum ſuper partem marginemque baſilarem deſcribunt obliquum, qui ſurſum

[*a*] Tab. II. 9.
[*b*] Tab. I. 4. 5.
[*c*] Tab. II 11. 14.
[*d*] Tab. II. 11.
[*e*] Tab. II. 14.
[*f*] Tab. II. 15.
[*g*] Tab. II. 16.

ſum ſimul, quo cum margine et parte baſilari congruat, et dextrorſum ſua conuexitate ſpectat, quo circa conum arterioſum flexae fibrae verſus baſin redeant arteriae pulmonalis. Sic anguſtiori ſua extremitate muſculus in ſuperficie cordis ſuperiori in fibras pulmonales anteriores, in earum quidem infimam, quae ſingulari latitudine in hoc corde gaudet, oblique inſeritur [*a*] vna cum fibris circumflexi dextri ſuperioris. Fibrillis illae quidem arctis breuibusque inter ſe connectuntur profundius, vt in ſuperficie vix quidquam huius nexus appareat; ita parum a ſolitis fibris muſcularibus differre videntur. Conſtantes etiam has fibras aorticas eſſe, nullum prorſus dubium eſſe poteſt.

Faſcia magna infundibuli. Tab. II. 17. 17. 17. 17.
Tab. I. 8. 8. 9. 10. 19. 20.

Inſignem et longe maiorem his praecedentibus omnibus ſe praebet faſcia infundibuli magna, quae totam reliquam a circumflexis partem regionis baſilaris [*b*] praeter angulum cordis [*c*] primo, deinde dum lata ſuper marginem tranſit baſilarem, anteriorem totam ſeu ſuperiorem partis infundibuliformis faciem in conuexa cordis ſuperficie occupat. [*d*] Terminatur ſuperius verſus arteriam pulmonalem circumflexis vtrinque, in media parte pulmonalibus fibris anterioribus et fibris interiectis. Anterius

[*a*] Tab. I. 5.
[*b*] Tab. II. 17. 17. 17. 17.
[*c*] Tab. II. 18. 19.
[*d*] Tab. I. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15 16. 17. 18. 19. 20.

terius ſeu verſus marginem cordis acutum faſcia angulari [a] limitatur. Dexterius ad marginem primo baſilarem ventriculi, dumque eum tranſit, ad baſin ſinus dextri vsque pertingit [b], ſiniſterius prorſus ad crenam ſepti vsque extenditur [c]. Haec ſatis longa lataque faſcia fibris conſtat, pariter latis, parallelis, ad axin infundibuli transverſalibus, fere rectis, paſſim tamen paulisper vndulatis, nec varias efficientibus minores faſciolas, quae faſciam compoſitae formarent, caeterum a reliquis facile omnibus fibris ventriculi dextri diuerſis: Circumflexi et pulmonales, quae conum arterioſum efficiunt, variis fibrarum directionibus varias magis faſciolas producunt. Angulares magis tenſae ſunt, et firmiores. Faſciae infundibuli fibrae vndulatae magis progrediuntur et laxiores ſunt, vt facilius paſſim a ſe inuicem remoueri poſſint. Fibrae vero ventrales, et quae circa apicem verſantur, manifeſto tenuiores ſunt et numeroſas faſciolas efficiunt. Oriuntur ergo fibrae faſciae infundibuli magnae a filo cartilagineo anteriori dextro [d], nodulo cartilagineo ipſo [e] et fili prima parte parua exceptis, quae aorticis fibris originem praebent. Hinc arcu, parallelo fibris aorticis, [f] per regionem baſilarem ſecundum latitudinem huius ſuperque marginem flexae, in ſuperficiem cordis ſuperiorem tranſeunt. In ea oblique ſiniſtrorſum et apicem verſus ductu, paral-

[a] Tab. I. 18. 27. 28.
[b] Tab. II. Y. 31. 31.
[c] Tab. I. 9. 10. 12. 17. 22.
[d] Tab. II. 31. 31.
[e] Tab. II. Z.
[f] Tab. II. 15. 16.

parallelo baſi arteriae pulmonalis, et transuerſali ad axin infundibuli, progrediuntur [a]. Inſeruntur denique in crenam ſepti. Vbi propinquae crenae ſunt, quodammodo in minores diuiduntur faſciolas. Harum prima anguſta [b], in hoc corde in pontem tranſit, eiusque vltimam partem efficit. Huius altera fibra [c] partim interrupta partim continua in fibras venticuli ſiniſtri deſcendit; altera [d] interrupta in crenam inſeritur. Faſciola ſecunda [e] ſub arteriam coronariam, quae in hac ſede prodit [f], ponte huc vsque tecta, ſe immergit inſeritque in crenam. Tertia [g] ſerratim cum fibris ventriculi ſiniſtri concurrit, et arteriam, quae, vbi emerſit, ramumque dedit, continuo ſe rurſum ſub carnes abſcondit, tegit. Quarta [h] interrupta continuatione in easdem ventriculi ſiniſtri fibras tranſit. Nusquam tam manifeſtae et diſtinctae in vniuerſo ventriculo dextro fibrillae apparent, quibus fibrae connectuntur, quam in hac infundibuli ſede. Latae fibrae ſunt et laxiores quam alibi, vt facile paſſim a ſe inuicem remoueri fibrillaeque profundiores inter eas detegi poſſint [i]. Harum aliae tamen ſuperficiales ſunt, quae in ipſa ſuper-

[a] Tab. I. 8. 8.
[b] Tab. I. 8. 9. 10.
[c] Tab. I. 9.
[d] Tab. I. 10.
[e] Tab. I. 12.
[f] Tab. I. f.
[g] Tab. I. 17. 17. 17.
[h] Tab. I. 20. 21. 22.
[i] Velut Tab. I. 16.

ſuperficie fibras, dum ab alia ſecedunt, in aliam oblique tranſeunt continuantque, connectunt [a]. Aliae profundiores ſunt fibrillae, quae fibris teguntur, quaeque, dum hae dilatantur, in conſpectum veniunt. [b] Oblique fibrillae, ſiue ſublimes ſiue profundae fuerint, a dextris ad ſiniſtra verſus baſin cordis fere adſcendunt. Nec alia facile ratio nexus, aut exempla eius, quae memorabilia ſint, in his magnae infundibuli faſciae fibris occurrunt. Conſtantem hanc faſciam eſſe nullum dubium eſt; cum fibras dari neceſſe ſit, quae oriantur a filo cartilagineo anteriori, aut eius ſede, quae partem baſilarem cordis late tegant, ſuper marginem tranſeant baſilarem et oblique in ſuperficie cordis ſuperiori verſus crenam deſcendant, in eamque inſerantur. Nec fieri poſſe arbitror, quin parallelae hae fibrae ſint baſi arteriae pulmonalis, et transuerſae ad axin infundibuli, quo eum vſum, quem in ſequentibus dicam, vſum faſciae infundibuli transuerſae, habeant, et re ipſa ergo faſcia ſint magna infundibuli. Neque de caeteris harum fibrarum proprietatibus, latitudine earum, vndulato ductu, nexu per fibrillas, et aliis, dubitandum eſſe, mea ſane ſententia videtur.

Fibrae angulares. Faſciae figura et ſedes; fibrarum proprietates. Tab. III. 55. 56. 57. 58. 59. Tab. I. 24. 24. 26. 27. 28. 30. 31.

Vſu imprimis et ſede, et parte, quam occupant, cordis non minus quam proprio ſuo, quo gaudent, ortu et

[a] Tab. I. 11. 14. 14.
[b] Tab. I. 15. 16.

et ductu fibrae ſi inſigniunt angulares, ſeu faſcia angularis, quam coniunctae hae fibrae efficiunt. Vix minor faſcia eſt, paulo anguſtior quidem, at longior tantundem, faſcia infundibuli magna. Vt haec ab anteriori cartilagineo filo dextro; a poſteriori illa potiſſimum exoritur. Poſtremam ergo et proximam ad baſin ſedem occupat in ſuperficie cordis plana. [*a*] In conuexam dum prodit, totum late angulum primo inuoluit cordis, [*b*] deinde, ductu conſimili poſita, magnae infundibuli faſciae adiecta eſt, maximam ventriculi dextri latitudinem in conuexa hac cordis ſuperficie, [*c*] et mediam fere eiusdem ſuperficiei partem, percurrendo. Sic partem baſi proximam in inferiori cordis ſuperficie, [*d*] angularem in baſilari, [*e*] et mediam fere in ſuperiori per omnem ventriculi latitudinem [*f*] ſitu occupat. Terminatur poſterius ſeu verſus baſin in plana cordis facie et in baſilari filo cartilagineo dextro poſteriori [*g*] in conuexa faſcia infundibuli magna. [*h*] Anterius ſeu verſus apicem et marginem acutum vbique ventrali faſcia limitatur. [*i*] Figura longa et pro longitudine auguſta eſt. Sex quaſi pollices cum lineis quinque longitudine in magno hoc et pulchro corde; qua-

 tuor

[*a*] Tab. III. D. 55. 56. 57. 58. 59.
[*b*] Tab. I. 24. 25. 24.
[*c*] Tab. I. 25. 28.
[*d*] Tab. III. G D. E.
[*e*] Tab. II. 24. 25.
[*f*] Tab. I. G. M. 28.
[*g*] Tab. III. 2. 3.
[*h*] Tab. I. 24. 16. 20.
[*i*] Tab. III. 53. 54. 54. Tab. I. M. 33. 34.

tuor praeter pollicem lineas latitudine aequat in media ſui parte circa angulum cordis, quae eius pars latiſſima eſt. In ſuperficie conuexa verſus ſeptum anguſtior pars dimidium quaſi pollicem lata [*a*] eſt. Extremitatem alteram, qua oritur in facie cordis plana, anguſtam, imo acutam, habet. [*b*] Inde continuo lateſcit ad angulum cordis vsque, [*c*] lataque angulum inuoluendo in ſuperficiem ſuperiorem adſcendit. [*d*] Hic ſenſim anguſtior fit denuo et figuram prae ſe fert fere pyriformem. Vbi anguſtiſſima eſt, in media ventriculi facie ſuperiori, in duas faſciolas diſtinguitur, [*e*] quarum altera, baſi cordis propior [*f*] acuto roſtrato fine in hoc corde ad crenam pertingit, [*g*] altera, propior apici, [*h*] ad priorem ſe applicat. Fibrae pari cum fibris faſciae praecedentis latitudine gaudent, et diſtinctam in ſuperficie ſuperiori ventriculi partem, quaſi dimidiam, baſi propiorem, cum prioribus faſciis efficiunt, quae latis nempe fibris conſtat; cum pars reliqua omnis ad apicem vsque, faſcia facta ventrali, tenuioribus manifeſto fibris efficiatur. Minus tamen vndulatae, rectae potius et tenſae, incedunt, imprimis in ſuperficie cordis ſuperiori et in angulo cordis. Nec adeo ſibi mutuo parallelae vbique ſunt, quam in faſcia infundibuli

[*a*] Tab. I. 26. 30.
[*b*] Tab. III. D.
[*c*] Tab. III. F. G.
[*d*] Tab. I. G. M.
[*e*] Tab. I. 26. 30.
[*f*] Tab I. 26. 27.
[*g*] Tab. I. 28.
[*h*] Tab. I. 31.

buli magna; quin aliae paſſim fibrae ſub aliis prodire videntur, [a] aliae ſe ad alias applicant. [b] Directionem eandem cum infundibuli faſcia habent, vt oblique dextrorſum in inferiori cordis ſuperficie, ſiniſtrorſum in ſuperiori, a baſi ad apicem deſcendant, multo transuerſo tamen, quod et de praecedentibus pariter notandum fibris eſt, quam longitudinali ductui propiores.

Ortus, progreſſus, directio fibrarum.

Oriuntur ergo fibrae angulares acuto principio primum ex angulo inter ſtriam, quae ſepti regionem in inferiori cordis ſuperficie deſignat, et filum cartilagineum poſterius dextrum [c]; deinde a toto hoc reliquo filo, [d] a ſtriae fibris, quae eius principium occupant, libero, et a parte poſteriori interſtitii celluloſi, quo fines filorum, anterioris et poſterioris, a ſe inuicem remoti ſunt [e]. Hinc angulis ad filum acutis, modo non parallelae filo, et transuerſae, dextrorſum, tantillo apicem verſus, ad marginem dextrum et angulum vsque progrediuntur; ſingularem in hac ſede ad baſin partem formando, a reliquo in plana hac cordis ſuperficie ventriculo diſtinctam, [f] inflatam, duriorem tactu, prominentemque, imprimis latis craſſisque et diſtinctis his fibris ipſis inſignem; cum caetera ſuperficiei inferioris pars tota plana et aequalis non

 modo

[a] Tab. I. 24. 24. 30.
[b] Tab. I. 30. 31.
[c] Tab. III. D.
[d] Tab. III. 2. 3. 1.
[e] Tab. III. E.
[f] Tab. III. D. E. G.

modo ſit, ſed tenuiore collabente carne quoque conſtare videatur, et fibris fiat tenuioribus planis, continuam fere carnem efficientibus. Quae partis angularis prominentia ſcilicet et durities a copioſis, qui eam intus replent, lacertis carneis et cauernoſa ſtructura, quam illi efficiunt, pendet. Late tum angulum cordis complectitur faſcia angularis, inueſtitque, et flexa in ſuperficiem ſuperiorem cordis prodit [*a*], vbi adiecta magnae infundibuli faſciae, conuerſis fibris decreſcendo latitudine, verſus crenam oblique porro progreditur. Non recte ergo omnis contra Lowerum ſpiralis ductus fibrarum cordis negatus eſt. Quum progrediendo dextrorſum in facie cordis plana continuo appropinquent apice fibrae angulares, a baſi continuo recedant; cum idem in conuexa ſuperficie faciant, recedere a baſi, appropinquare apici pergant, vt maxime omnium in finibus ſuis, minime in principiis ſint a baſi remotae; ſpirales omnino ſunt, aut partes ſpirarum. Non ſpirales, ſed ſemicirculares, eſſent, ſi, quantum receſſerint a baſi in inferiori ſuperficie, ad eandem appropinquarent in ſuperiori. Quod autem non fieri, anatomico recte notandum. Simili ductu procedunt fibrae externae ventriculi ſiniſtri. In ſolis ventralibus dextri ſunt, quas non ſpirales appellare poſſis.

Raphe ventriculi dextri. Tab. I. 26. 30. 33. 40. 41. 42.

Quando in mediam vsque ſuperiorem cordis ſuperficiem progreſſa eſt faſcia angularis, in aliquam raphis ſpeciem incidit, quam et ipſa et magna infundibuli faſcia

aliqua

[*a*] Tab. I. G. M.

aliqua ſui parte, et faſciolae ventrales interrupta fibrarum continuatione efficere videntur; quodammodo analogam crenae in ſepti regione, ductu ſ romanum inuerſum deſcribentem. In aliis cordibus ad circumflexas dextras vsque adſcendere hanc raphen vidi, indeque deſcendere ductu curuato ad inferiorem ſeu anteriorem partem crenae. In ventrali parte ventriculi faſciolarum in alias faſciolas inſertione fere efficitur. [*a*] In angulari ſerrati quid obſcure apparet, [*b*] quod tamen ad interruptam continuationem potius referendum eſſe videtur. Sic variis fibrarum, transuerſim aut oblique per mediam partem ventriculi tranſeuntium, affectionibus haec linea efficitur, quae futurae ſpeciem prae ſe ferens ſecando fibras a circumflexis dextris fere incipere, arcuatim inde verſus apicem deſcendere, et alio contrario arcu facto ſe applicare ſolet ad crenam ſepti. [*c*] Etiam in duos ramos diuiſam ſuturam vidi, quorum alter ille, qui ad crenam redit, alter ad marginem acutum cordis vsque excurrit. Vti crenam arteria legit coronaria ſiniſtra; dextra exacte ſuturam perſequitur; vt diuiſa verſus crenam altero ramo, altero ad marginem, vt raphe, transeat. Ex quibus ſcilicet, cum veſtigia ſic exhibeat arteriae coronariae dextrae conſtantem ſuturam, pariter atque crenam, eſſe intelligo.

Fibrarum angularium inſertio, nexus.

Antequam ad raphen in hoc corde faſcia angularis pertingit, ſenſim diſtincta iam eſt in duas minores faſciolas, qua-

[*a*] Tab. I. 33. 40. 41.
[*b*] Tab. I. 26. 30.
[*c*] Tab. I. 42.

quarum altera [*a*], propior baſi, longior, altera, [*b*] apici propior, breuior eſt. Ambae contiguae per raphen tranſeunt [*c*]; vt, vel in nouas duas faſciolas angularem faſciam diuiſam inſeri finibus ſuis, vel abire interrupta continuatione, autumare poſſis. Longior leni ductu, fere ſerpentino, verſus crenam pergit, [*d*] ſenſimque contracta acuto demum, quaſi roſtrato fine [*e*] ad eam peruenit, in eandemque inſeritur. Breuior diſperſis fibris ſimulque arcuatis [*f*] ad longam ſe applicat, in eiusque extremam fibram ea ratione ſe inſerit. Sic capite acuto angularis faſcia longiſſima ex angulo inter filum cartilagineum poſterius et ſtriam ſepti in inferiori cordis ſuperficie oritur, acutaque pariter cauda in ſuperiori ſuperficie in crenam ſepti inſeritur, media latiſſima parte tanquam ventre angulum cordis inuoluendo. Vbique fibrillis hae latae longaeque fibrae angulares inter ſe connectuntur, profundis partim, maxime ſuperficialibus, ex vicina fibra in vicinam excurrentibus [*g*]. Tum frequenter quoque per inordinatam coalitionem paſſim fibrae, imprimis prope angulum cordis, [*h*] cohaerent. Nec exempla in hac faſcia deſunt minorum faſciolarum, inter ſe connexarum. Tota breuior fasciola circa mar-

---

[*a*] Tab. I. 26. 27.
[*b*] Tab. I. 30. 31.
[*c*] Tab. I. 26. 30.
[*d*] Tab I. 27.
[*e*] Tab. I. 28.
[*f*] Tab. I. 31.
[*g*] Tab. I. 18.
[*h*] Tab. I. 29.

marginem cordis ſub longiori ſenſim fibris ſuis prodire videtur [a]; eademque extremitatibus fibrarum ad eandem longam ſe denuo applicat [b]. Non dubito, quin conſtans ſit faſcia angularis. Fibrae, quae a filo cartilagineo dextro poſteriori oriuntur, non poſſunt non circa ipſum angulum cordis ſe flectere, eundemque inuoluere, et in ſuperficie ſuperiori porro oblique ad crenam vsque continuare. Hae ergo vbivbi ſunt, angulares erunt. Haud pari tamen conſtantia diuiſam faſciam in duas faſciolas puto, quarum ſimili ratione finitarum altera in alteram redeat.

Faſcia ventralis. Tab. III. D. E. F.
Tab. I. M. D. 34.

Quanquam haud multo minor ſit faſcia ventralis caeteris, quas hactenus dixi, ſimul ſumtis omnibus; quanquam etiam in complures ſit diuiſa faſciolas, quae magnitudine pluribus earum, quas tanquam proprias faſcias in ſuperioribus conſideraui et deſcripſi, non cedunt; tamen, cum neque diuerſis oriantur originibus fibrae ventrales, neque inſertionibus finiantur diuerſis, neque partes tandem cordis diverſas, quas ſeorſim aut imprimis conſtringerent ſua actione, complectant, tanquam vna faſcia potius vel vnus muſculus conſiderandae mihi viſae ſunt illae, eo magis, quod copioſae faſciolae, quibus ventralis faſcia conſtat, minime conſtantes eo vsque eſſe videntur, vt totidem vbique inuenias faſciolas, ſingulasque easdem, licet variantes, tamen

[a] Tab. I. 24.
[b] Tab. I. 31.

tamen recognoſcas. Neque apicis faſciam [*a*] tanquam propriam atque diuerſam a ventrali diſtinguere audeo, ob cauſam eandem, quod non in ſingulis cordibus eam adeo ab illa diſtinctam directione fibrarum fore ſperari poteſt, quam quidem in hoc corde fuit, cuius iconem coram habemus. Si tamen conſtantior praeter ſpem fibrarum directione et inſertione in crenam intacta futura inueniretur, cum partem cordis peculiarem, apicem, fibroſa ſtructura repletiſſimam, comprehendat, nihil obſtabit, quo minus tanquam ſingularis apicis faſcia conſideretur, quam interim partem ventralis eſſe cenſebimus.

Sedes, magnitudo, figura, conditio fibrarum.

Totam ergo ventralem partem et apicem ſimul ventriculi dextri et marginem cordis anteriorem, praeter angulum, faſcia ventralis occupat. In ſuperficie cordis inferiori ſolam partem angularem ad baſin, anguſtiſſimam prope ſepti regionem, verſus angulum ſenſim latiorem, in ſuperiori plus quam dimidiam verſus baſin partem relinquit; caeteram ad apicem vsque in ſuperficie cordis vtraque et in margine omnem replet. Latiſſima eſt, dum oritur, in ſuperficie cordis inferiori [*b*] ad ſtriam ſepti, vbi longitudinem cordis ipſam a baſi ad apicem habet. Hinc latere, quo poſterius verſus baſin terminatur [*c*], oblique ad marginem primo, deinde in ſuperiori ſuperficie ad crenam vsque ſepti decurrente, [*d*] continuo latitudine decre-

[*a*] Tab. I. 52. 53. 57.
[*b*] Tab. III. D. F.
[*c*] Tab. III. D. G.
[*d*] Tab. I. M. 34.

creſcit, aliis ſucceſſiue fasciis, angulari primo in plana cordis facie, deinde et magna infundibuli, et pulmonali, et circumflexis fibris, in conuexa, ventrali fasciae et cordis baſi interpoſitis; vt quartam ſui partem iam in margine hac ratione [*a*], plus quam dimidiam in fine ad crenam ſepti [*b*] perdiderit. Hoc latere obliquo poſteriori verſus baſin cum fascia angulari in vtraque ſuperficie contingit. Crena ſepti in ſuperiori, ſtria in inferiori terminatur. Ad apicem angulo finitur obtuſo [*c*]. Sic triangularis figura fascia ventralis eſt, latere maximo obliquo verſus baſin cordis ſpectante, altero, quod medium magnitudine eſt, ad ſtriam ſepti in plana cordis ſuperficie, tertio minimo ad crenam in conuexa poſito; apice trianguli apicem efficiente ventriculi. Hac figura parti, dimidia maiori, ventriculi ad apicem circumuoluta fascia in duo diuiſa eſt triangula minora, quorum alterum in ſuperiori ſuperficie minorem huius dimidia partem [*d*], alterum in inferiori eius longe dimidia maiorem [*e*], et praeter angularem omnem ſuperficiem, occupat. Vt fibrae fasciarum priorum notabili latitudine gaudent, vt ductu conſimili iuxta ſe mutuo, maximam ſane partem, incedunt, et aequales fere ſunt omnes inter ſe; ventralis fasciae fibrae tenuitate ſingulari ad apicem vsque ſunt inſignes; vt continuo partem poſteriorem in conuexa cordis ſuperficie [*f*], fibris latioribus

 factam,

[*a*] Tab. I. M. D.
[*b*] Tab. I. 34. D.
[*c*] Tab. III. F. Tab. I. D.
[*d*] Tab. I. M. 34. D.
[*e*] Tab. III. D. G. F.
[*f*] Tab. I. M. I. C. 34.

factam, ab anteriori [*a*] diſtinguas, quam faſcia efficit ventralis. Partem ventriculi arterioſam fere latae fibrae complectuntur; venoſam tenues; modo vt angulus cordis, qui ad venoſam pertinet, latis fibris conſtet. At quae a filis oriuntur cartilagineis et baſibus arteriarum omnes exacte latae ſunt [*b*], tenues, quae originem a ſtria ſepti petunt [*c*]. Tum etiam diuerſis directionibus fibrae ventrales, diſtinctas formando faſciolas, progrediuntur in facie cordis conuexa, vt aliae frequenter in alias inſerantur; in plana compactae, planae, ſimili ductu, at tenues tamen, vbi diſtinguuntur, incedunt, cum angulares pariter vti in conuexa facie latae ſint.

Ortus, progreſſus.

Oriuntur fibrae ventrales ex latere dextro totius ſtriae latae, qua ſepti regio in inferiori cordis ſuperficie deſignatur [*d*]. Nullis diſtinctis extremitatibus tamen ex margine ſtriae oriuntur, ſicuti finibus ſuis in crenam inſertae obſeruantur; ſed continuantur potius ex ipſis ſtriae longitudinalibus fibris [*e*], quae ſucceſſiue ad marginem dextrum productae flectuntur, a ſtria ſecedunt, et in fibras abeunt ventriculi dextri [*f*]; quemadmodum in ſuperioribus de ſtria ſepti dictum eſt. Fibrae ſic ſatis latae et diſtinctae,

[*a*] Tab. I. M. 34. D.

[*b*] Tab. III. D. G E. Tab. I. G. M. 28. Tab. II. Y. L. 8. Tab. I. G. I C. 28.

[*c*] Tab. III. D. G F. Tab. I. M. D. 28.

[*d*] Tab. III. D. F.

[*e*] Tab. III. 53. 54. 54.

[*f*] Tab. III. 63 64.

ſtinctae, aliaeque prae aliis eminentes [*a*], a ſtria ſecedunt, quae progreſſu tamen cito in planam fere continuam laeuem ſuperficiem [*b*] abeunt, diſtinctam ab vniuerſa ſuperiori non modo, ſed ab altera dimidia inferiori etiam cordis ſuperficie, in quibus vbique fibrae eminentes et interſtitia inter eas, fibrillis repleta, diſtinguuntur, cum ſola haec dimidia pars dextra ſuperficiei inferioris cordis plana et aequalis et laeuis ſit. Prope apicem tamen fibrae fortiores lataeque et diſtinctae, vt a ſtria ſecedunt, ad marginem vsque et ad apicem continuant [*c*]. Ductu fere transuerſali ventrales fibrae ventriculi dextri progrediuntur et parallelae filo cartilagineo poſteriori dextro. Eoque magis contra omnium anatomicorum ſententiam transuerſae vocari merentur; cum in ſuperiori cordis ſuperficie verſus baſin potius quam apicem verſus, quaedam fasciolae declinent, [*d*] caeterae omnino transuerſae ſint. Nec ſpirales ergo hae ventrales quidem cenſeri poſſunt, quae, ſi paululum in inferiori ſuperficie a baſi recedunt, tantundem ſane redeunt ad eandem in ſuperiori. Transuerſae ergo omnino ſunt etiam hoc reſpectu, ſeu ſemicirculares, et ſolae quidem ex omnibus cordis externis. Sic parallelae inter ſe fibrae tenues et vix diſtinctae progrediuntur. Vbi ad marginem cordis perueniunt, aliae ab aliis diſcedunt varias formando fasciolas [*e*], quae directionibus diuerſis progrediendo in ſuperiorem cordis ſuperficiem tranſeunt. In hac

 ſuis

[*a*] Tab. III. 65. 70. 71.
[*b*] Tab. III. 61. 62. 63. 64.
[*c*] Tab. III. 70. 71. 72. 75.
[*d*] Tab. I. 33. 37. 38. 40. 44. 48.
[*e*] Tab. I. 24. 32. 36. 39. 43. 47. 50. 52.

ſuis diuerſis ductibus ſingulae continuant. Recta transuerſim aliae, aliae verſus baſin oblique adſcendendo incedunt, et aliae hac ratione ad alias ſe applicant [a]. Coniunctae demum ad raphen primo [b], eaque deinde ſuperata, ad crenam perueniunt, in quam inſeruntur. Quae tamen fasciolae propiores apici ſunt, quae tanquam propria apicis fascia conſiderari poſſunt, intacta raphe [c] ad crenam pertingunt.

Inſertio, nexus.

Vt latus fasciae poſterius oblique a baſi apicem verſus ad marginem in plana cordis ſuperficie, indeque porro ad crenam vsque in conuexa, ductum eſt; fibrae vero transverſim incedunt, immo frequenter verſus baſin redeunt; magna earum pars non poteſt ad crenam vsque peruenire; incurrunt nempe in latus obliquum et applicant ſe ergo ad fasciam angularem, qua verſus baſin ventralis fascia terminatur. Videntur iam in inferiori cordis ſuperficie primae fasciae fibrae ad angularem fasciam terminari [d]. Tum manifeſto in ſuperiori facie ſatis lata fasciola ſe tota ad illam applicat [e]. Reliquae fere per ſuturam tranſeundo, vel, quae poſt eam finitam apicis fibrae oriuntur, continuo, in crenam ſe inſerunt. Non adeo diſtincte fibrillas nectentes inter has tenues fibras ventrales vidi quam quidem in latioribus fasciarum infundibuli fibris; non tamen prorſus deeſſe videntur. Maxime vero fasciolarum compli-

[a] Tab. I. 37. 38. 30. 32.
[b] Tab. I. 33. 40. 41.
[c] Tab. I. 49. 58
[d] Tab. III. 53. 54. 55.
[e] Tab. I. 24. 32. 33.

plicatione ventralium fibrarum nexus efficitur, quae miris modis aliae ex aliis oriuntur, ad alias ſe rurſum applicant, et inextricabiles ſaepe, imprimis circa ſuturam, plexus fibrarum producunt. Vniuerſa faſcia ventralis procul dubio conſtans eſt; cum fibrae a ſtria ſepti ortae, neceſſario hanc faſciam efficiant. Neque videtur latioribus fibris facile inueniri, neque fibrae alia incedere videntur directione.

Faſciolae ventrales, vt in hoc corde ſe habent.

Iam monui, faſciolas, quibus ventralis faſcia conſtat, non adeo videri conſtantes, vt in ſingulis cordibus eaedem rurſus vel plane ſimiles iis, quas pinxi, inueniantur. Neque ſingulas directione et ductu diuerſas fibras earumque complicationes exprimere in icone potui. Siquidem inter omnes externas cordis, quae hancce regionem ventralem in ſuperiori ſuperficie occupant, fibrae obſeruatu et definitu difficillimae mihi eſſe viſae ſunt. Reddidi ergo faſciolas notabiliores et diſtinctiores, minores obſcurioresque illarum et minus certas omiſi. Vt aliquod tamen harum faſciolarum ventralium exemplum exſtet, quamuis minus conſtantes ſint, breuibus verbis notabiliores illas faſciolas, vti in hoc corde obſeruabantur, recenſere, earumque ductum deſcribere operae pretium eſſe videtur.

Tab. I. 24 32. 33. 34. 35.

Nouem quaſi faſciolas, directione fibrarum aut inſertione diuerſas, ſatis manifeſto diſtinguere potui. Prima earum, fere omnium latiſſima, niſi in ipſa iam cordis inferiori ſuperficie, certe ad marginem cordis, indeque porro in ſuperiori ſuperficie ad raphen vsque, fibras continuo mittit ad faſciam angularem, cui ſe illae fere pennatim inſe-

ſerunt. Reliquae, arcuatim verſus apicem flexae, in raphen tranſeunt; vnde interrupta continuatione fractae, emergentesque nouoque inuerſo arcu verſus baſin flexae, in duas portiones diuiduntur, quarum altera [a] acutam extremitatem producit, cum extremitate fasciae angularis concurrentem, cum eaque inſertam in crenam. Inter has fasciarum extremitates foramen conſpicuum erat pro ramo arteriae coronariae ſiniſtrae. Altera [b], primum anguſta, deinde diſperſis fibris lata [c], in crenam abit. Fibrae huius fasciolae, ductu fere ſerpentino varie flexae, directionem tamen in vniuerſum magis oblique adſcendentem quam deſcendentem, vt vulgo externae deſcribuntur, habent.

Tab. I. 32. 36. 37. 38.

Secunda fasciola anguſtior eſt. Conſtat ex vna fibra latiore primaria [d], et caeteris [e], in eam inſertis. Primaria parallela fasciolae praecedenti ductuque conformi in raphen abit, in eaque ipſa in priorem ſe inſerit fasciolam, vbi haec arcu verſus apicem deſcendit. Reliquae praeter vltimam oblique adſcendendo ad raphen vsque ſucceſſiue in primariam illam inſeruntur. Vltima tandem latior raphen tranſit, et in priorem fasciolam ſe inſerit, vbi haec ſecundo arcu verſus baſin reflecti incipit.

Tab.

---

[a] Tab. I. 33. 33. 34.
[b] Tab. I. 33. 35.
[c] Tab. I. 35.
[d] Tab. I. 37.
[e] Tab. I. 38.

Tab. I. 36. 39. 40. 41. 42.

Tertia paulo latior fasciola in hoc corde aequali ſere fibrarum ductu, oblique verſus baſin adſcendendo, a margine ad ſuturam vsque pergit. Ad eam ſuprema fibra criſpata [*a*] in duas vel tres diuiditur fibrillas, arcuatim in vltimas primae fasciolae fibras ita inſertas, vt plane continuari in eas videantur. Tunc fibrae ſequentes [*b*] in eam ſupremam crispam, atque curuatam verſus apicem, ſibram inſeruntur. Vltima fibrarum pars [*c*] autem lateſcendo ad crenam vsque peruenit, in eamque ſe iuxta latiorem portionem primae fibrillae inſerit.

Tab. I. 39. 43. 44. 45. 46.

Quarta difficilis eſt, niſi tres portiones in ea diſtinxeris, quarum prima [*d*] anguſta ex margine incipit, inde ſenſim diſperſis fibris lateſcit, denique, collectis iisdem in vnam longam fibram [*e*], hac ipſa, verſus apicem curuata, in crenam inſeritur. Secunda portio [*f*] in longam illam curuatam fibram tranſit, tertia anguſtior [*g*], ſed longa, ad crenam ipſa peruenit, in eamque ſe inſerit.

Tab.

[*a*] Tab. I. 40.
[*b*] Tab. I. 41.
[*c*] Tab. I 42.
[*d*] Tab. I. 39. 42. 45.
[*e*] Tab. I. 42. 45.
[*f*] Tab. I. 44.
[*g*] Tab. I. 43. 46.

Tab. I. 43. 47. 48. 49.

Simplicior quinta ſimili fibrarum ductu a margine oblique verſus baſin declinando primum, deinde redeundo verſus apicem, ad crenam progreditur, in eamque tranſit. Quaedam tamen vltimarum fibrarum [*a*], magis prioribus ad baſin inclinando, in eas inſeruntur. Et aliae porro [*b*], transuerſali propiores ductui, ex illis adſcendentibus quaſi prodire videntur. Hae ſe adiungunt prioribus, cum iisque ad crenam vsque continuant, in quam inſeruntur.

Tab. I. 47. 50. 51.

Sexta facilis, parallela praecedentibus, oblique verſus baſin ad crenam progreditur; modo vt minus prope crenam curuata redeat verſus apicem. Sic in curuatas praecedentis fasciolae fibras impingit, in easque ſe inſerit [*c*].

Inconſtans apicis faſcia. *Tab. I.* 50. 57. 51.

Septima octaua et nona ad apicem pertinent. Differunt eo a praecedentibus, vt minus verſus baſin adſcendant, veroque ſenſu transuerſim ad crenam progrediantur. Deinde, vti ſola in ſuperficie cordis ſuperiori ventrales fasciolae diſtinctae ſunt, vnam continuam in inferiori efficientes faciem, diſperſis fibris in ipſo margine cordis; quae ad apicem pertinent, a ventralibus proprie dictis in inferiori ſuperficie iam diſtinctae, ex reſolutis vltimis ſtriae fibris oriuntur, quae ad marginem progreſſae octauam imprimis

[*a*] Tab. I. 48.
[*b*] Tab. I. 49.
[*c*] Tab. I. 51.

primis et nonam faſciolam producunt, ſeptima inter vicinas emergente, et in ſextam quoque inſerta.

Tab. I. 50. 52. 53.

Haec nempe tenuis breuiſſimis ad marginem fibrillis [*a*] ſeptima oritur, ex fibris octauae prodeuntibus, oblique verſus baſin adſcendentibus, et in vnam demum fibram collectis, quae nunc transuerſim ad crenam ducitur, et infimam fibrarum huius faſciolae efficit. Reliquae ſuperiores ſeu poſteriores fibrae ſub fibris ſextae faſciolae emergunt, deſcendunt primo oblique, iterumque adſcendunt, vnaque cum infima in eandem ſextam inſeruntur [*b*]. Vltima vero ſextae fibra [*c*], vt multae praecedentium faſciolarum, receptis ſeptimae fibris, ſola tenuis ſuper crenam in ventriculi ſiniſtri ſuperficiem tranſit.

Tab. I. 52. 54. 55. 56.

Octaua triangularis parte altera oblonga inferiore primaria [*d*], altera ſuperiore ſeu poſteriore [*e*] conſtat accedente. Illa principio anguſto a margine in ſuperficiem prodit ſuperiorem. Progreditur accurate transuerſim fibris leniter vndulatis ad crenam, in quam deſcendendo verſus apicem inſeritur. Superior pars huic fibris, ſub ſeptima faſciola prodeuntibus, ſucceſſiue accedit, figuramque faſcio-

 lae

[*a*] Tab. I. 52.
[*b*] Tab I. 53.
[*c*] Tab. I. 51.
[*d*] Tab. I. 52. 54. 56.
[*e*] Tab. I. 55.

lae triangularem efficit, et in crenam ſe pariter inſerit. Tum vero inferior pars, dum inſeritur, collectis fibris vnam craſſiorem ſingularem fibram producit in hoc corde, et inſigniter eminentem [a], quae ſuper crenam tranſit, et in ventriculo ſiniſtro cum aliis huius ventriculi fibris ad apicem eius vsque continuat.

Tab. I. 54. 57. 58. 58.

Denique vltima nona pariter transuerſalis fasciola fibris ſuper marginem ad apicem vsque in conſpectum venientibus in octauam tota inſeritur [b]. Haec nempe vltima ſui parte verſus apicem declinat. In eam partem ſuperiores nonae fasciolae fibrae inſeruntur; reliquae in prolongatam fibram, pariter oblique ad apicem ventriculi ſiniſtri deſcendentem, tranſeunt.

Actio fibrarum externarum ventriculi dextri. Directio earum eiusque directionis in actione vſus: 1.) Contractio communis 2.) ſingularum ventriculi partium conſtrictio transuerſalis.

Sic fibrae ſe habent externae ventriculi dextri; ex quarum deſcriptione, hactenus tradita, patet, haud ſatis accurate eſſe dictum: deſcendere has fibras omnes oblique a baſi ſiniſtrorſum et apicem verſus, De iis, quae a baſi arteriarum et quae porro a filis cartilagineis dextris oriuntur, quodammodo hoc affirmari poteſt, quatenus tanquam ventriculi dextri aut cordis fibrae in vniuerſum conſiderantur; nullo modo de ventralibus idem verum eſt, quae im-

[a] Tab. I. 57.
[b] Tab. I. 58. 58.

imprimis in ſuperiori ſuperficie ab apice potius ſiniſtrorſum et verſus baſin oblique adſcendunt. Deinde vero etiam hoc imprimis notandum eſt: Quamuis ſingulae faſciae illae, quas diſtinxi, ad ventriculum omnino dextrum, vel ad cor, immo etiam, ſi mauis, ad corpus humanum pertineant, eiusque ſint musculi; tamen ſpeciatim illas et proprie ad eas pertinere partes ventriculi, quas obducunt, et quas ſua actione conſtringunt; proinde, ſi quaeſtio fuerit de directione harum fibrarum; non ad ventriculum, aut ad cor, ſed ad partes illas, ad quas pertinent, earumque ſitum et figuram, eſſe reſpiciendum. Id autem ſi facias, vix vlla obliqua fibra inter omnes externas ventriculi dextri erit. Quae ad conum arterioſum et ad totum infundibulum, ſeu partem arterioſam ventriculi infundibuliformem, pertinent, transuerſae ſeu circulares aut ſemicirculares ſunt pro his partibus ſuis. Oriuntur in baſi cordis ſiniſterius ex fouea triangulari, a baſi aortae et filo cartilagineo anteriori; ducuntur inde arcuatim ſuper partem baſilarem marginemque baſilarem et ſuperficiem ventriculi ſuperiorem, parallelae atque concentricae cum baſi arteriae pulmonalis, vel, quod idem eſt, cum infundibuli lumine. Sunt ergo veri harum partium conſtrictores et pro ſitu et figura earum fibrae transuerſae. Ventrales, quae ad partem ventriculi venoſam pertinent, non minus transuerſae ſunt pro hac venoſa parte. Sunt quoque pro corde transverſae, aut fere transuerſae, at hoc quidem praeter vllum naturae finem accidit; cum axis partis venoſae cum axi cordis aut ventriculi in eundem ſenſum ſit ductus. Veram naturam dixeris et vſum harum fibrarum, transuerſales eas vocando partis venoſae. Igitur quae fibrae externae ventriculi dextri in vniuerſum dictae ſunt obliquae

 eius

eius ventriculi, quae nullo ſcilicet peculiari fungerentur officio, niſi vt, quod de omnibus aeque fibris cordis dici poteſt, ad contractionem ventriculi ſuam vim contribuerent, eas diuerſos diuerſarum partium muſculos ſimul eſſe vides, qui ſinguli praeter communem ventriculi contractionem eum quoque pro his partibus ſuis vſum peculiarem habeant, vt, ſolita illa primaria ratione, transuerſim eas partes conſtringant.

Concurſus fibrarum in actione vſus: contractio in varios ſenſus.

Alius, non minus memorabilis, in vniuerſali ventriculi contractione actionis fibrarum effectus et peculiaris eſt ille, qui ab ortu fibrarum ex maiori circumferentiae parte et concurſu earum in partem minorem dependet. Quo ſecundum latitudinem non modo, ſed ad longitudinem quoque, ventriculus, vel generatim ſecundum plures dimenſiones, contrahitur. Id fieri non poſſet, ſi fibrae, ſiue obliquae, ſiue transuerſae, parallelae omnes inter ſe a parte circumferentiae dimidia altera ad alteram vsque progrederentur. Nunc a baſi arteriae pulmonalis fibrae, a baſi aortae, a toto latere anteriori baſis ſinus dextri porro, deinde ab eius latere poſteriori, ſuper angulum cordis in ſuperiorem eius ſuperficiem productae, denique etiam a ſtria ſepti oriuntur, ſuper marginem anteriorem in ſuperiorem ſuperficiem adſcendentes. Hae omnes in ſolam crenam concurrunt, haud omni ortus ambitui, quin ſoli potius ſtriae, reſpondentem. A baſi ergo, ſiue a parte poſteriori, oblique antrorſum, quae a baſibus arteriarum et ſinus oriuntur, a dextra parte verſus ſiniſtram, quae fibrae angulares, a filo cartilagineo poſteriori ortae, ſuper

ſuper angulum tranſeunt, et ab anteriori demum parte oblique retrorſum, quae ſuper marginem anteriorem cordis adſcendunt, ventrales fibrae ventriculi partes extremas ducunt; proinde ſecundam varias dimenſiones parietem ventriculi contrahunt.

Huius contractionis vtilitas.

Maxime quidem vniuerſalis haec parietis ventriculi contractio fibris efficitur internis mediisque, cum actione externarum coniunctis, quae quidem imprimis internae omnino externas decuſſant; proinde, vti ſecundum latitudinem iſtae oblique ventriculum, ſecundum longitudinem eundem, contrahunt, breuioremque, vt anguſtiorem externae, reddunt. At iſte quidem contractionis modus, quo alio fibrarum ſtrato longitudinalis, alio transuerſalis, efficitur, haud plane ſatisfacere videtur ſola inſtituto et finibus naturae. Dum enim ad aliam dimenſionem, eamque ſolam, internum, ad aliam externum, contrahitur ſtratum; non poterit non aliis in ſedibus internum, quo ſenſu hoc minus contrahitur, impedimento eſſe externo, in aliis, quo magis illud externo arctatur, relinquere idem, ab eoque ſolui. Videtur eo magis haec coniectura locum habere, cum plurimae fibrae omnino faſciculique fibrarum et columnae, a parietibus ſolutae, in cauitatibus ventriculorum reperiantur. Quae, cum extremitatibus ſuis vtplurimum parieti ſint adnatae, media parte ſolutae, per cavum recta tranſeant, concaua parietis parte relicta breuiores; validiori omnino contractione a ſtratis exterioribus ſolutae eſſe videntur. Quod ipſum, quo minus toti accidere poſſit ſtrato interno, eo imprimis prohibitum eſſe videtur, quod ſua ſponte quoduis ſe contrahat ſtratum in

varios

varios ſenſus, externumque proinde, niſi omnino, aut vbique, maximam tamen partem, et plurimis in ſedibus, internum ſequatur.

Vſus nexus fibrarum per fibrillas: contractio ventriculi ſecundum latitudinem fibrarum.

Plurimum tamen ad vniuerſalem illam contractionem copioſiſſimus fibrarum nexus facit; quamuis haud parum etiam ſit, quod concurſus fibrarum ex maiori circumferentiae parte in partem minorem confert. Singulae fibrae, dum fibrillis, ex altera in alteram tranſeuntibus, continuatisque, connectuntur, breuiores non modo communi actione fiunt, ſed anguſtiores quoque, magisque compreſſae et duriores, redduntur, ventriculumque proinde in vtramque partem, quoad longitudinem et latitudinem, contrahunt. Fibrillae nimirum in parte imprimis infundibuliformi oblique a margine cordis anteriori retrorſum verſus baſin arteriae pulmonalis ducuntur, dum fibrae huius partis ipſae a baſilari margine et ab arteriae pulmonalis baſi antrorſum oblique et ſiniſtrorſum incedunt. Fibrae ventrales directionem fibrillarum fere ſequuntur, a margine anteriori oblique retrorſum ad crenam progrediendo. Sic margo baſilaris oblique antrorſum et ſiniſtrorſum, anterior margo retrorſum oblique et ſiniſtrorſum ducitur, dum angulus, medius inter marginem vtrumque, propriis ſuis fibris ſiniſtrorſum recta mouetur; et ventriculus ergo ſecundum vtramque dimenſionem a baſi ad apicem et a margine anteriori ad crenam contrahitur.

Idem

Idem, vt et validior ventriculi contractio, vſus a complicatione faſciolarum.

Similem effectum faſciolae habent, oblique ex aliis ortae, in alias oblique inſertae, vt ſecundum diuerſas directiones, quibus aut oriuntur, aut inſeruntur, eas, quas occupant, ſedes, imprimis eas faſciolas ipſas, ex quibus oriuntur, et in quas ſe inſerunt, contrahant. Sic paſſim faſciolae, quae ipſae propriis ſuis fibris contractae iam ſunt, aliis porro faſciolis, in illas inſertis, retrahuntur. Quo figuram ſuam mutant, ex rectis ſerpentinae fiunt, eaque ratione, vt paries ventriculi ſecundum latitudinem fibrarum contrahatur non modo, ſed etiam vt validior ſecundum longitudinem earum contractio fiat, efficiunt. Idem poſterior effectus ab eo complicationis genere, quo duae faſciolae extremitatibus ſuis interrupta continuatione coniunguntur, exſpectari poteſt; quemadmodum inſcriptionibus muſculorum tendineis eundem vſum attribuere ſolemus. Atque haec vera procul dubio cauſa eſt, cur, aliter atque in caeteris omnibus, non fibris, ab ortu ad inſertionem vsque continuis, et aequali ductu progredientibus, muſculi cordis, ſed breuibus numeroſis, longitudine pariter et ductu diuerſis, mirabili inter ſe modo coniunctis, complicatisque, ſint conflati; quo ſimplicitate et elegantia ſtructurae multo caeteris muſculis cor inferius, at tanto vtilitate excellentius, eſt. Quum in ſingulis punctis fibrae ſibi vicinis annexae, iſtaeque porro cum ſequentibus coniunctae ſint; quae vel oblique vel arcuatim in alias inſeruntur, vel quae ſerpentino progrediuntur ductu, non in rectam actione rediguntur lineam, quod fibris omnino, ſolito modo in media parte liberis, ſolisque extremitatibus fixis, accidere oportet, ſed conſtantes in ſuo ſitu

contractae, variis directionibus varias parietis ventriculi ſedes variaque puncta trahunt; quae ſingulae tractiones, cum in circumferentia fixus ſit paries, in media concaua parte ſola mobilis, in nullum alium effectum, niſi in coarctationem et diminutionem parietis ſecundum varias dimenſiones, et in applicationem eiusdem ad ſeptum, tranſire poſſunt.

Contractio communis curatius conſiderata. Punctum fixum et mobile. Fixum circumferentia tota; mobile margo anterior, baſilaris, et angulus.

Haec tamen accuratius parietis ventriculi contractio vniuerſalis in varias dimenſiones explicanda eſt; poſtquam quibus modis quibusque fibris et fibrillis efficiatur, vidimus. Imprimis, quod punctum fixum, vel ſedes fixa, quae mobilis ſit in iſto pariete, determinandum. Oriri fibras, dictum eſt in ſuperioribus, a partibus, ad baſin ſitis, et a ſtria ſepti; inſeri contra in crenam; cum iſta mihi commodior expreſſio videretur. Coeterum non ita hoc accipi volui, quaſi punctum fixum in ortu, in inſertione mobile eſſet; quin potius fixior ſedes in crena, mobilior in arteria pulmonali et in filis cartilagineis, eſſe videtur. Maxime tamen pro rei natura punctum fixum in vniuerſa parietis ventriculi circumferentia externa, paucioribus quidem partibus exceptis, mobile in ſuperficie externa, ſiue in pariete contrahendo ipſo, imprimis vero in margine acuto, in angulo, et in baſilari margine, ponendum eſt; quae ſingulae partes ſcilicet in medio inter vtrasque, ortus et inſertionis, ſedes poſitae, ab vtrisque inter caeteras parietis partes remotiſſimae, nulla omnino fixita-

ſixitate donatae, ad vtrasque pariter quoque, ortus et inſertionis, ſedes, proinde ad omnem circumquaque parietis ventriculi circumferentiam, attrahuntur. Margo anterior, inter ſtriam ſepti et crenam medius, et ab vtraque inter caeteras parietis partes remotiſſimus, ventralibus fibris, qua parte ſuperficiem cordis inferiorem occupant, ortis a ſtria ſepti, ad ſtriam, qua ſitae in ſuperiori facie in crenam ſe inſerunt, ad crenam ſimul, eiusque partem apici propiorem, trahitur. Margo baſilaris, medius inter filum cartilagineum anterius, et partem crenae ſuperiorem, faſciae infundibuli fibris, quo vsque in baſilari regione ſitae ſunt, ortis a filo, ad filum retrorſum, qua parte conuexam cordis ſuperficiem occupant, in crenam inſertae, antrorſum verſus crenam mouetur. Angulus, inter filum cartilagineum poſterius et mediam partem crenae obliquo ductu ſitus, ab vtroque pariter remotus, verſus filum oblique retrorſum parte angularium fibrarum inferiore, ſuperiore verſus crenam antrorſum oblique, trahitur. Vt ſingulae ergo faſciae illae faſciolaeque, a filis cartilagineis et ſtria ſepti ortae in crenam inſertae, tanquam duo muſculi ſint conſiderandae, quorum alter vel ab alterutro filorum cartilagineorum, vel a ſtria, alter a crena oriatur, vterque vel in marginem anteriorem, vel angulum, vel in baſilarem marginem, inſeratur.

Marginis anterioris in contractione ventriculi motus.

Dum margo vero anterior ad crenam ſimul et ſtriam ſepti trahitur; neque ad hanc prorſus neque ad illam, ſed ad medium potius, quod inter vtramque continetur, ſeptum, promotum iri, facile intelligitur. Iam ea ſepti

in dextro ventriculo conditio eſt, vt duabus inſtructum ſit ſitu diuerſis ſuperficiebus, ſuperiori altera, maiori, qua verſus parietem ſuperiorem reſpicit, altera oblique anteriori dexteriorique et minore, pollicem quaſi lata, qua recta ſpectat verſus marginem cordis anteriorem acutum, dum cor in ſtatu quietis eſt. Hae facies planae ad angulum rectum inter ſe compoſitae ſunt, quo ipſo a ſe inuicem diſtinguuntur, et qui angulo intus concauo marginis anterioris ventriculi reſpondet. Sic, dum ventriculus contrahitur, paries inferior contractus ad faciem ſepti anteriorem, cauitas marginis acuti ad angulum ſepti, paries ſuperior ad ſuperiorem ſepti ſuperficiem, applicatur. Quod ſpatium inter ſepti facies et parietes ventriculi ſupereſt, papillis et columnis occupatum efficit, vt nulla cauitate relicta ſanguis facile omnis expellatur.

Motus marginis baſilaris.

Margo baſilaris, dum fibris infundibuli, qua parte regionem occupant baſilarem, ad filum cartilagineum anterius oblique retrorſum dextrorſum, qua tranſeunt in ſuperiorem cordis ſuperficiem, ad crenam ſimul trahitur ſiniſtrorſum antrorſum oblique; mediam inter has ſedes directionem ſecutus deorſum ad valuulam ſibi ſubiectam orificii venoſi et ſiniſtrorſum paululum verſus crenam antrorſumque mouetur. Cauitas nimirum marginis baſilaris fibris non modo plurimis et cauernoſa carnea ſtructura repleta, ſed fibulis quoque ſingularibus inſtructa eſt, quibus, dum in actione ventriculus eſt, labia cauitatis contrahuntur, cauitas ipſa conſtringitur. Et ruga haec, quae marginem efficit, quaeque niſi fibulae obſtarent, fibris infundibuli explicaretur, conſtans permanet, marginemque efficit conſtantem

ſtantem baſilarem ipſum in ſyſtole cordis. Sic margo, ſuper faciem imprimis baſilarem ſuperque conuexam quodammodo faciem cordis eleuatus, nulla alia ratione, niſi deorſum oblique antrorſumque et ſiniſtrorſum, moueri et ad caeteras ſic ventriculi partes contractas, ad parietes marginemque anteriorem et ſeptum, contractus ipſe applicari poteſt.

Anguli motus.

Angulus cordis pariter intus repletus eſt multis columnis trabibusque carneis, ab altero ad alterum parietem tranſeuntibus, ramificatis, quibus ille in ſyſtole contractus tenetur. Hic nunc parte fibrarum angularium inferiori verſus filum cartilagineum poſterius, oblique ſiniſtrorſum retrorſum, ſuperiori verſus crenam, antrorſum ſiniſtrorſum oblique; vtraque ergo ſimul agente recta ſiniſtrorſum, verſus ſupremam ſepti partem, contractus trahitur.

Ventriculi his ſedium mobilium motibus complicatio.

Sic margo ventriculi anterior oblique ſiniſtrorſum retrorſum verſus ſeptum, baſilaris ſiniſtrorſum antrorſum verſus ſeptum et marginem anteriorem, angulus denique ſiniſtrorſum verſus marginem vtrumque et ſeptum mouetur, et parietes ventriculi, ſuperior, inferior, baſilaris, plicati ad ſe inuicem et ad ſeptum, papillis nimirum, quod reliquum eſt ſpatium, occupantibus, apprimuntur. Hac ratione, ſpecie aliqua complicationis, mihi quidem ventriculus dexter ſe contrahere videtur.

In quas dimenſiones ventriculus contrahatur.

His ſedium hunc fixarum mobiliumque natura et ſitu accuratius conſideratis, apparet, in quas dimenſiones ventriculus fibris quidem ſolis externis et contrahatur, et qua ratione hae motuum directiones differant ab iis, quas fibrae, per ſuperiorem imprimis ſuperficiem diſtributae, ductu ſuo indicant; ex quo ductu ſcilicet ſolo actio vulgo fibrarum iudicari ſolet. A baſi nimirum cordis oblique antrorſum ſiniſtrorſum et deorſum margo baſilaris fertur, quem antrorſum tantum et ſiniſtrorſum, haud deorſum, fibrae illae ſolae ducerent; anterior retrorſum oblique et ſiniſtrorſum ad medium ſeptum mouetur, cum ſurſum ſimul verſus crenam illum fibrae pro ſuo ductu traherent; angulus recta ſiniſtrorſum pariter verſus ſepti ſuperiorem regionem ducitur, quem et antrorſum paulisper verſus apicem et ſurſum verſus crenam ſimul fibrae ſuperiores ducerent, ſi ſolae quidem iſtae aut coniunctae cum inferioribus ad directionem tamen eam agerent, quam ſuo progreſſu indicant.

Ventriculi ſecundum longitudinem contractio.

Marginis ergo baſilaris motu anguſtior ventriculus ſimul et breuior et tenuior quoque, anguli anguſtior ſolum, marginis anterioris, pariter et anguſtior et breuior efficitur. Verum eſt, parum id eſſe, quod ſecundum longitudinem ventriculus contrahitur, cum fibrae, quibus margo baſilaris mouetur, magis multo ſiniſtrorſum quam antrorſum, ventrales, quibus anterior attrahitur, ſiniſtrorſum maxime, parum retrorſum, progrediantur. Concedendum etiam eſt, non puram aut directam hanc, quae fibris

fibris quidem externis efficitur, ſecundum longitudinem ventriculi contractionem eſſe, ſed obliquam, qua maxime quidem ſecundum latitudinem, paululum tantum ſecundum longitudinem ſimul ille contrahitur; cum propria inter externas longitudinalis fibra nulla detur; at veram tamen ſecundum longitudinem ventriculi et cordis contractionem fieri, praeter obliquitatem fibrarum externarum ſepti manifeſto in vtroque ventriculo fibrae, omnino longitudinales, demonſtrant.

Attenuatio ventriculi. Contractio in tres dimenſiones.

Dumque margo baſilaris, faſcia infundibuli verſus baſin auriculae ſimul et verſus crenam oblique tractus, deorſum verſus parietem ventriculi inferiorem mouetur; tenuior quoque ventriculus in parte ſui poſteriori verſus baſin, vbi craſſiſſimus eſt, redditur, vt et anguſtior et breuior et tenuior ſimul fiat. Duplex ergo iſtuc imprimis momentum in contractione ventriculi notandum eſt: 1) vt partes, baſi propiores, ſimul, dum totus conſtringitur ventriculus, antrorſum, propiores apici retrorſum, ducantur; quo et anguſtior et breuior ventriculus redditur; 2) vt verſus interiora ſimul ſedes imprimis mobiles parietum ventriculi; ad mediam partem ſepti anterior margo, baſilariis deorſum, angulus verſus ſeptum pariter, trahantur, quo, maxime baſilaris marginis, motu, tenuior ſimul, anguſtior et breuior dum fit, ventriculus efficitur.

Actio ſingularum faſciarum. Coni arterioſi actio diuerſa ab actione fibrarum reliquarum. Circumflexae ſiniſtrae.

Praeter hunc communem omnium faſciarum vſum, quaedam earum, niſi ſingulae peculiari quoque in actione ventri-

ventriculi officio funguntur. Imprimis faſciolae huc pertinent coni arterioſi, quae adeo a caeteris ventriculi faſciis reſpectu vſus differunt, vt parum etiam ad communem hactenus deſcriptam actionem conferant, ſed peculiares potius coni arterioſi muſculi eſſe videantur, natura quodammodo et vſu ab illis diuerſi. Fibrae circumflexae ſiniſtrae eo imprimis inſeruire videntur, ut conum arterioſum et baſin arteriae pulmonalis ad cor reuinciant, quo minus valida ſua, quam patiuntur, hae partes conſtrictione ex ſitu ſuo naturali moueri poſſint. Videtur hoc agere natura, vt ſanguinem, quantum fieri poſſet, vi maxima ex ventriculo per arteriam pulmonalem pelleret, cum mollior haec inertiorque arteria ad promouendum ſanguinem per pulmones aegrius ſufficiat. Si nullo exiſtente cono arterioſo diſtincto pars haec ſuprema ventriculi adnata eſſet ſepto, exigua tantum et vix vlla eius conſtrictio fieri poſſet; cum ſeparatus a corde liberque circumquaque conus ad contactum parietum vsque conſtringi queat. At vero tum mobilis quidem conus vacillaret et quauis ſyſtole ex ſitu ſuo pelleretur, niſi peculiaribus his fibris circumflexis cordi alligatus eſſet. Hic primarius ergo vſus earum eſſe videtur. Tum vero latus quoque ſiniſtrum apicis coni et orificii arterioſi conſtringunt, partemque eam licet paruam arctiſſime ad crenam ſepti complicatam retrahunt, eaque ratione ad communem conſtrictionem coni et orificii arterioſi ventriculi ſymbolum ſuum conferunt. Caeterum facile patet, has fibras nullo modo quidquam ad ventriculi contractionem ſiue longitudinis ſiue latitudinis reſpectu contribuere poſſe; cum neque baſilarem marginem, neque anteriorem, neque angulum, tangant. Orificii potius arterioſi vel coni arterioſi fibras eſſe manifeſtum

ſeſtum eſt, quibus, cum mobiles ſint, ad crenam ſepti hae partes retrahuntur. Quae fibrae a ſtria et filis oriuntur cartilagineis vtraque, ortus et inſertionis, puncta fixa habent. Mobilia in partibus mediis earum ad marginem acutum angulumque et marginem baſilarem exiſtunt. Solito contra modo circumflexae ſiniſtrae fixum in altera extremitate ad crenam, in altera mobile ad baſin arteriae pulmonalis punctum habent, quam baſis partem ad crenam ad adducunt, et vſu proinde non modo ſed natura quoque ab illis ventriculi fibris differunt. Sic pariter vero ſe res habet cum fibris pulmonalibus anterioribus, cum interiectis et circumflexis dextris, quae ſimili modo et natura ſuae diſpoſitionis et vſu a caeteris ventriculi fibris differunt.

Pulmonales anteriores.

Pulmonales anteriores, quando ſe contrahunt, totum fere latus anterius baſis arteriae pulmonalis ad crenam adducunt; adeoque magnam partem orificii arterioſi et coni conſtringunt, ſimulque ſiniſtrorſum orificium oblique et deorſum conſtrictum retrahunt. Expellunt ergo conſtrictione ſupremae partis coni ſanguinem, in ea contentum, adiuuantque actionem eandem eo, quod baſin arteriae deorſum ducunt, ſanguinemque hac ratione quaſi protrudunt. Praeterea et hae fibrae, dum tranſeunt in pontem, conum arterioſum ad crenam alligant fixumque eius ſitum in ſyſtole cordis reddunt. Punctum fixum earum in crena eſt, mobile procul dubio in baſi arteriae pulmonalis, quae mollis facile et complicatur et ſiniſtrorſum deorſumque retrahitur.

Interiectae.

Fibrae interiectae partem inferiorem coni arterioſi contrahunt, ſimulque circumflexas fibras dextras, ex quibus oriuntur, proinde et totum latus dextrum coni arterioſi ſiniſtrorſum et deorſum oblique verſus crenam retrahunt. Sic iſtae quoque fibrae fixum punctum in crena, mobile ad circumflexas, habent. Conferunt omnino ad coarctationem partis ſuperioris ventriculi, ad quem conus arterioſus pertinet. Magis id tamen per adductionem lateris dextri coni et baſis arteriae pulmonalis ad ſiniſtrum, quam vel ſimplici ſuae longitudinis imminutione, vel applicatione eminentis e media earum parte formati marginis ad ſeptum, quo cauitas inter marginem et ſeptum contenta euaneſceret. Differunt ergo natura et vſu a propriis ventriculi dextri fibris, ventralibus, angularibus, et faſcia infundibuli magna.

Circumflexae dextrae ſuperiores.

Idem denique de circumflexis dextris vtrisque dici poteſt, quae propriae praecipuaeque coni et orificii arterioſi fibrae ſunt. Vt anteriorem eorum partem ad crenam anterius fibrae attrahunt circumflexae ſiniſtrae, pulmonales anteriores et interiectae; ad foueam poſterius, quae ſepti regioni pone arteriam laterique arteriae ſiniſtro reſpondet, circumflexae dextrae ſuperiores latus orificii dextrum, totamque poſteriorem orificii et coni partem, trahunt, eaque ratione cum illis conſpirant, vt vtraeque, dum ſimul agunt, ſuperiorem coni partem et orificium ad ſeptum adſtringant. Circumflexae nimirum dextrae partem dextram orificii, quam circumdant, conſtringunt, conſtrictamque

tamque retrorſum et ſiniſtrorſum porro ducunt, pulmonales anteriores, ex quibus circumflexae dextrae oriuntur, tum reliquam anteriorem orificii portionem, tum et ipſum punctum mobile circumflexarum, ex parte anteriori ſiniſtrorſum trahunt. Vtraeque ergo totum orificium ad ſeptum adſtringunt. Videturque neceſſe eſſe, vt baſis arteriae pulmonalis, dum orificium ventriculi conſtringitur, dumque truncus arteriae ſanguine impulſo dilatatur, in rugas aliquo modo complicetur, et bulbi figuram arteria ſic tempore ſyſtoles cordis induat.

Inferiores.

Circumflexae dextrae inferiores a baſi aortae poſterius natae, inſertae anterius in interiectas, baſin coni arterioſi conſtringunt; minorem tamen quam ſuperiores efficiunt conſtrictionem; cum poſteriori ſua extremitate minime ad latus coni ſiniſtrum vsque, vt ſuperiores, pertingant, adeoque vix dimidiam partem circumferentiae, aut luminis coni, quam complectuntur, includant. Sic ſenſim magis magisque et conus, qui integram circuli circumferentiam in apice prope arteriam pulmonalem habet, verſus baſin deficit, inque ſimplicem tandem parietem abit ventriculi, et conſtrictio ſucceſſiue imminuta coni in parietis denique abit applicationem ſimplicem ad ſeptum cordis. Vt circumflexae ſuperiores cum pulmonalibus anterius; inferiores cum interiectis cohaerent; interiectaeque proinde inferiorum circumflexarum, pulmonales ſuperiorum adiutrices ſunt. Vtrisque anterioribus fibris conſtrictio coni, quo vsque per circumflexas licet, perficitur. Vti interiectae vero magnam partem quoque in pulmonales inſeruntur, praeterquam quod in crenam tranſeant, et in

 parte

parte poſteriori pariter ſiniſterius ex baſi aortae oriuntur; videtur interiectarum et circumflexarum inferiorum conſtrictio ea ratione fieri, vt ſanguinem coni comprimendo ſurſum ſimul verſus orificium arterioſum compellant.

Faſcia infundibuli magna.

Dimidium ad axin diuiſum conum fere infundibulum refert, quod faſcia magna cingit, ſuperficiem eius exteriorem efficiendo. Paries ergo anterior ſeu ſuperior conuexus ſolus infundibuli faſcia conſtringi poteſt. Neque mobilis baſis ventriculi eſſe videtur ad filum cartilagineum anterius; vt omnis, qui contractione fibrarum faſciae efficitur motus in marginis baſilaris conſtricti approximatione et applicatione ad ſeptum et ad parietes, ſuperiorem et inferiorem, contractos conſiſtat, quemadmodum in ſuperioribus dictum eſt. Si tamen filum cartilagineum anterius tractioni fibrarum baſilarium paululum cedit, id, cum ſesquialterum pollicem quaſi inferius margine baſilari ſitum ſit filum, minime obſtare poteſt, quo minus, et his baſilaribus fibrarum faſciae partibus, et iis, quae in ſuperiorem ventriculi ſuperficiem tranſeunt, margo baſilaris deorſum oblique et ſiniſtrorſum ſimulque antrorſum moueatur. Id ſolum, ſi filum cum baſi auriculae cedit, efficietur, vt eo magis antrorſum verſus apicem cordis margo baſilaris promoueatur. Proinde quae completa totius luminis conſtrictio fieri in apice coni et in orificio arterioſo ventriculi videtur, quae minus completa conſtrictio luminis ad coni baſin, ea actio in parte iam infundibuliformi marginis baſilaris obliqua adductio ad ſeptum eſt. Eo magis autem pulchra haec coni marginisque baſilaris ſtructura externa et actio ſtructurae notari meretur, cum interna;

in

in ſequentibus explicanda diſſertationibus, externae mire reſpondeat. Margo baſilaris plenus eſt intus fibris carneis ramificatis, quibus agentibus latera marginis contrahuntur. Id quidem eo magis, quo propior ſedes ſit angulo cordis. Et fibulis peculiaribus praeterea intus margo inſtructus eſt in hunc manifeſto finem, vt latera in ſyſtole contrahant marginisque explicationi reſiſtant. Vnde patet ad ſolitam conſtrictionem, parietumque aequalem approximationem ad axin cauitatis, marginem baſilarem minime factum, ſed ad aliud peculiare genus contractionis formatum eſſe. Conus contra, quo vsque hic ſe dextrorſum extendit, laeuis intus eſt, fibris inſtructus planis, minime eminentibus, pro figura coni longitudinalibus. Hic ergo quominus transuerſalibus ſuis fibris externis aequali parietum ad axin approximatione conſtringatur, nil obſtat.

Fibrae angulares.

Fibrae angulares natura et actione perquam ſimiles ſunt faſciae infundibuli fibris. Vt marginem hae baſilarem, angulum illae ventriculi, qui pars extrema marginis eſt, verſus ſeptum ducunt. Angulus pariter ac margo inſtructus intus eſt multis fibris ramificatis, ab altero in alterum parietem tranſeuntibus, quibus ille in ſyſtole cordis contractus tenetur. Contractus ergo angulus analoga actione compoſita, vt margo, partibus fibrarum angularium, inferiorem cordis ſuperficiem occupantibus, et iis, quae ſuperiorem tenent, ad mediam inter vtrasque fibras directionem recta ſiniſtrorſum verſus ſuperiorem partem ſepti ducitur. In hoc tamen nullum dubium eſt, quin ſolum punctum mobile in angulo ſit, fixa ſedes in ortu fibrarum ad filum cartilagineum poſterius aeque et in inſertione ad

crenam. Fibrae enim ſub angulo acutiſſimo a filo oriuntur, eique fere parallelae progrediuntur. Filum ergo, ſi mobilis ortus eſſet, extenderent, quod ſua firmitate huic motui ſatis reſiſtit; antrorſum baſin ſinus producere non poſſunt.

Ventrales.

Ventrales cum marginem cordis anteriorem ad ſeptum retrahunt, conſtrictum pariter mouere videntur. Quamuis enim haud ita, vt angulus et baſilaris margo, anterior ſit fibris repletus; quaedam tamen anterius verſus apicem parietem ſuperiorem cum inferiori intus connectunt, quo minus margo explicari poſſit. Apex ventriculi plenus eſt intus fibris carneis, in omnes dimenſiones extenſis, a pariete altero ad alterum, a ſepto ad marginem, productis, inter ſe ipſas connexis. Idem etiam externas fibras in varias dimenſiones ductas habet, quibus minus apex, vel aliqua eius pars ſecundum certam directionem promoueri, quam ſimpliciter contrahi poſſit. Is totus ergo, maxime tamen ad ſeptum, conſtringi videtur.

DATV-

DATVRAE NOVAE HYBRIDAE.

Auctore

J. T. KOELREVTER.

Solancearum plantarum ordo naturalis, ſi ad Cel. *Adanſonii* mentem eum componas, paucas hucvsque hybridas, nec niſi ex Lycii atque Daturae genere, mihi ſuppeditauit. Harum pars iam ſuo loco deſcripta exſtat, reliquae autem in praeſenti elencho naturae curioſis offeruntur.

Exp. I.
Datura *inërmis.* (*a*) ♀.
Datura *ferox.* ♂.
Anno 1774. d. 26. Iul. Flor. 2.

Deſcriptio.

Vna iſtarum capſularum 321, altera 380 bonae notae ſemina dedit. Plantae anno ſubſequenti inde prognatae plures, inter vtrumque parentem mediae conformationis. Flores inexpectati coloris, ex albido violacei. Pulueris

(*a*) Stramonium americanum minus, Alkekengi folio. Juſſ. H. R. P. Jacq. hort, cent. III. p. 44. t. 82.

ueris antherarum particulae, licet permultae regulares ſuccoque ſpermatico bene repletae fuerint, attamen etiam vacuae atque effoetae magno numero iis erant interſperſae: manifeſto certe naturae hybridae indicio. Capſulae earum plantarum, quas in ollas transplantaueram, 60 ad 70, aliarum, ſub dio cultarum autem 120 ad 130 ſemina bona continebant. Spinae capſularum ſat validae quidem, aſt altero tanto plures, quam in D. feroci. Plantae eiusmodi, ſub dio cultae, caulis diameter, die 14. Octobr. menſus, 2'', 6''', peripheria 9'', diameter vniuerſae ramificationis 11', pondus autem, absque radice, 73 libr. aequabat, quamuis iſto tempore hicce gigas vegetabilis a mirandi ſui incrementi termino adhuc longe abſuerit.

Not. Inuerſum huius experimenti modum tentare neglexi; cum vero, vt ex copulae Exp. IV. effectu patebit clarius, ad idem fere redeat, de proſpero eius ſucceſſu nullus dubitauerim.

Exp. II.
Datura *inermis*. ♀.
Datura *Stramonium*. ♂.
Anno 1772. die 25. Julii Flor. 4.
Vid. Exper. inuerſ. III.

Deſcriptio.

Plantae inde procrentae plures, mediae inter parentes ſimilitudinis, aſt in ſummo gradu foecundae; hinc Daturam inermem, quae plenaria pericarpii glabritie, ac obtuſiore forma, aliisque leuioribus notis a Datura ſtramonio differt, non pro diuerſa ſpecie, ſed mera tantum huius varietate, conſtante quidem, agnoſcendam eſſe, iudico.

Exp.

Exp. III.

Datura *ſtramonium.* ♀.

Datura *inermis.* ♂.

Anno 1773. die 10. Iul. Flor. 6.

Vid. Exp. inuerſ. II.

Deſcriptio.

Plantae iis Exp. praecedentis ſimillimae ac foecundiſſimae; ſingulae enim ipſarum capſulae a 400 ad 500, immo plura ſaepius ſemina bona proferebant.

Exp. IV.

Datura *ferox.* ♀.

Datura *ſtramonium.* ♂.

Anno 1774. die 28. Iulii Flor. 2.

Deſcriptio.

Plantae anno ſubſequenti inde prognatae hybridae mediam inter vtrumque parentem ſimilitudinem, et notabiliter diminutam foecunditatem monſtrabant. Experimentum inuerſum, licet ipſe non tentauerim, proſpere tamen ſucceſſurum inde colligo, quod Datura Tatula, vt varietas grandior Daturae ſtramonii, experimento (vid *Zweyte Fortſetzung der Vorläuf. Nachr. S.* 125. XLV. *und* XLVI. *Verſ.*) iam probata, in ſequenti copula ſimilem fere cum feroce vnionem non reſpuerit.

Exp. V.

Datura *Tatula.* ♀.

Datura *ferox.* ♂.

Anno 1774. die 28. Iulii Flor. 2.

Vid. Exp. inuerſ. *Dritte Fortſ. der Vorläuf. Nachr. S.* 115. LVIII. *Verſ.*

Deſcriptio.

Ambae iſtarum capſularum modicam tantum acquiſiuere magnitudinem, earumque vna 114, altera 98 ſeminibus bonis foeta. Ceterum plantae hybridae, anno ſequenti inde procreatae, eaeque Exp. inuerſi, modo citati, tam forma et colore, quam foecunditate diminuta, inter ſe omnino ſimiles erant.

Copulationes Daturarum aliarumque Solanacearum fruſtra huc vsque tentatae.

Exp. VI.

Datura *Tatula.* ♀.
Datura *Metel.* ♂.
Anno 1760. die 30. Iul. Flor. 1.
Vid. Exp. inuerſ. VII.
Conceptio nulla.

Exp. VII.

Datura *Metel.* ♀.
Datura *Tatula.* ♂.
Anno 1760. die 30. Iul. Flor. 1.
Vid. Exp. inuerſ. VI.

Exp. VIII.

Datura *Tatula.* ♀.
Datura *faſtuoſa.* ♂.
Anno 1760. die 10. Aug. Flor. 4.
Vid. Exp. inuerſ. IX.
Conceptio nulla.

Exp.

Exp. IX.

Datura *faſtuoſa.* ♀.

Datura *Tatula.* ♂.

Anno 1765. die 7. Aug. Flor. 1.

Vid. Exp. inuerſ. VIII.

Conceptio nulla.

Exp. X.

Datura *Stramonium.* ♀.

Datura *Metel.* ♂.

Anno 1762. die 9. Aug. Flor. 1.

Vid. Exp. inuerſ. XI.

Conceptio nulla.

Exp. XI.

Datura *Metel.* ♀.

Datura *Stramonium.* ♂.

Anno 1762. die 23. Aug. Flor. 1.

Vid. Exp. inuerſ. X.

Conceptio nulla.

Exp. XII.

Datura *Metel.* ♀.

Datura *faſtuoſa.* ♂.

Anno 1760. die 15. Aug. Flor. 1.

Vid. Exp. inuerſ. XIII.

Conceptio nulla.

Exp. XIII.

Datura *faſtuoſa.* ♀.

Datura *Metel.* ♂.

Anno 1771. die 4. Aug. Flor. 1.

Vid. Exp. inuerſ. XII.

Conceptio nulla.

Exp. XIV.

Datura *Stramonium.* ♀.
Hyoſcyam. *niger.* ♂.
Anno 1762 die 22. Iun. Flor. 1.
Conceptio nulla.

Exp. XV.

Datura *Stramonium.* ♀.
Hyoſcyam. *albus.* ♂.
Anno 1762. die 15. Iulii Flor. 1.
Conceptio nulla.

Exp. XVI.

Datura *Tatula.* ♀.
Hyoſcyam. *albus.* ♂.
Anno 1762. die 15. Iul. Flor. 2.
Conceptio nulla.

Exp. XVII.

Datura *Tatula.* ♀.
Hyoſcyam. *niger.* ♂.
Anno 1762. die 27. Iun. Flor. 2.
Conceptio nulla.

Exp. XVIII.

Datura *Stramonium.* ♀.
Nicot. *fruticoſa.* ♂. ſeu perennis Nic. Tabaci varietas.
Anno 1760. die 20. Iun. Flor. 1.
Conceptio nulla.

Exp.

Exp. XIX.

Datura *Stramonium.* ♀.

Atropa *Belladonna.* ♂.

Anno 1762. die 1. Iul. Flor. 5.

Conceptio nulla.

Exp. XX.

Atropa *Belladonna.* ♀.

Atropa *phyſalodes.* ♂.

Anno 1762. die 27. Iun. Flor. 1.

Vid. Exp. inuerſ. XXI.

Conceptio nulla.

Exp. XXI.

Atropa *phyſalodes.* ♀.

Atropa *Belladonna.* ♂.

Anno 1762. die 8. Iul. Flor. 3.

Vid. Exp. inuerſ. XX.

Conceptio. nulla.

Exp. XXII.

Atropa *Belladonna.* ♀.

Nolana *proſtrata.* ♂.

Anno 1762. die 17. et 19. Iul. Flor. 2.

Vid. Exp. inuerſ. XXIII.

Conceptio inanis.

Exp. XXIII.

Nolana *proſtrata.* ♀.

Atropa *Belladonna.* ♂.

Anno 1762. die 1. Iulii. Flor. 9.

Vid. Exp. inuerſ. XXII.

Conceptio nulla.

Exp. XXIV.

Atropa *Belladonna.* ♀.
Phyſalis *angulata.* ♂.
Anno 1762. die 4. Iun. Flos. 1.
Conceptio nulla.

Exp. XXV.

Atropa *phyſalodes.* ♀.
Nolana *proſtrata.* ♂.
Anno 1762. die 29 Iun. Flor. 2.
Conceptio nulla.

Exp. XXVI.

Atropa *phyſalodes.* ♀.
Phyſalis *Alkekengi.* ♂.
Anno 1759. die 10 Sept. Flor. 2.
Vid. Exp. inuerſ. XXXIII.
Conceptio nulla.

Exp. XXVII.

Atropa *phyſalodes.* ♀.
Phyſalis *angulata.* ♂.
Anno 1762. die 15 Iun. Flor. 2.
Vid. Exp. inuerſ. XXVIII.
Conceptio nulla.

Exp. XXVIII.

Phyſalis *angulata.* ♀.
Atropa *phyſalodes.* ♂.
Anno 1762. die 8 Iul. Flor. 7.
Vid. Exp. inuerſ. XXVII.
Conceptio nulla.

Exp. XXIX.

Atropa *phyſalodes.* ♀.
Phyſalis *pubeſcens.* ♂.
Anno 1760. die 23 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

Exp. XXX.

Phyſalis *Alkekengi.* ♀.
Phyſalis *pubeſcens.* ♂.
Anno 1760. die 6 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

Exp. XXXI.

Phyſalis *angulata.* ♀.
Phyſalis *Alkekengi.* ♂.
Anno 1762. die 3 Iul. Flor. 2.
Conceptio nulla.

Exp. XXXII.

Phyſalis *Alkekengi.* ♀.
Nicot. *ruſtica.* ♂.
Anno 1760. die 4 Aug. Flor. 3.
Conceptio nulla.

Exp. XXXIII.

Phyſalis *Alkekengi.* ♀.
Atropa *phyſalodes.* ♂.
Anno 1760. die 13 Aug. Flor. 5.
Vid. Exp. inuerſ. XXVI.
Conceptio nulla.

Exp. XXXIV.

Solanum *aethiopicum.* ♀.
Solanum *Melongena.* ♂.

Anno

Anno 1768. die 26 Aug. Flor. 1.
Vid. Exp. inuerſ. XXXV.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Exp. XXXV.

Solanum *Melongena*. ♀.
Solanum *aethiopicum*. ♂.
Anno 1765. die 20 Aug. Flor. 1.
Vid. Exp. inuerſ. XXXIV.
Conceptio nulla.

Exp. XXXVI.

Solanum *aethiopicum*. ♀.
Solanum *bonarienſe*. ♂.
Anno 1768. die 9 Aug. Flor. 3.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Exp. XXXVII.

Solanum *aethiopicum*. ♀.
Solanum *nigrum*, vulg. ♂.
Anno 1768 die 30 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

Exp. XXXVIII.

Solanum *Lycoperſicum*. ♀.
Solanum *aethiopicum*. ♂.
Anno 1765. die 20 Aug. Flor. 1.
Conceptio nulla.

Exp. XXXIX.

Solanum *Melongena*. ♀.
Solanum *nigrum*, guineenſe. ♂.
Anno 1765. die 23 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

Exp.

Exp. XL.

Solanum *Melongena.* ♀.
Solanum *Sodomeum.* ♂.
Anno 1765. die 19 Aug. Flor. 1.
Vid. Exp. inuerſ. XLI.
Conceptio nulla.

Exp. XLI.

Solanum *Sodomeum.* ♀.
Solanum *Melongena.* ♂.
Anno 1765. die 17 Aug. Flor. 1.
Vid. Exp. inuerſ. XL.
Conceptio nulla.

Exp. XLII.

Solanum *Melongena.* ♀.
Solanum *indicum.* ♂.
Anno 1765. die 28 Aug. Flor. 1.
Conceptio nulla.

Exp. XLIII.

Solanum *Sodomeum.* ♀.
Solanum *tuberoſum.* ♂.
Anno 1762. die 8 Aug. Flor. 1.
Conceptio nulla.

Exp. XLIV.

Solanum *Sodomeum.* ♀.
Solanum *aethiopicum.* ♂.
Anno 1765. die 21 Aug. Flor. 1.
Conceptio nulla.

SORICES
ALIQVOT ILLVSTRATI,

A

P. S. PALLAS.

Ordinem naturalem mihi ſemper conſtituere viſa ſunt genera, *Linnaeo* partim ferarum ordini inſerta, partim Anthropomorphorum nomine recenſita, Lemurum, Veſpertilionum, Didelphidum, Talparum, Soricum, Erinaceorum; quibus Simiarum quoque gens praefigenda videtur, quemadmodum poſteriora genera euidenter cum Gliribus ordine cohaerent, media vero gradatim ad Feras tendunt.

Ex hoc ordine, quem *Semiferarum* titulo ſalutari vellem, illuſtrandum hic ſumam *Soricum* genus, Erinaceis praeſertim ſtructura dentium affine, ſimiliterque ad naturam Glirium inclinans, quod nondum pro dignitate cognitum eſt. Procul dubio enim longe plures dantur eius, in variis orbis regionibus ſpecies, quam hucdum norant vel diſtinxerant Zoologi. Ante *D'Aubentonum* vix bene notus

notus erat vulgaris europaea ſpecies, quam Murem-araneum veteres appellabant; duplicauit ille numerum *Sorice aquatico*, quem et ipſe anno 1757. in Germania obſeruaram, et nondum viſo opere Buffonii aeri incidi quondam curaueram. Americanas quasdam ſpecies adinuenit *Kalmius*, indicam *Seba*, ſibiricam *Laxmannus*, quas tamen omnes, ſatis imperfecte cognitas, breuiſſime recenſuerunt Cell. Zoologi *Pennant* et *Schreber* atque Ill. *Linnaeus*. Multo plures vero in variis orbis partibus latere Soricum diſtinctas ſpecies, ex inuentis apud nos iure concludere poſſe mihi videor, quarum ſucceſſiue deſcriptiones et icones proponam, ſpeciem ſimul indicam, haud quaquam pro elegantia illuſtratam, accurate expoſiturus.

S O R E X M O S C H A T V S.

Plurima vero et maxime notatu digna de *Sorice moſchato* noſtro dicenda habeo, ſpecie per plurima genera iactata, quam ego primus Soricino generi reddidi [*a*], quam deſcripſerunt varii, ſed maxime memorabilia internae ſtructurae momenta praeteruiderunt.

Prima huius animalis, inter Sorices facile maximi, notitia debetur *Cluſio* [*b*] qui Murem aquaticum exoticum

[*a*] *Itinerar. vol* 1. *p.* 156. *not.* Soricem moſchatum Ill. *Buffon* in mirabilem quendam ordinem naturalem, quem nemo Zoologorum ſomniauerit, cum Caſtore, Lutra, immo Phoca et Rosmaro, concoxit (*Hiſt. nat. vol. XIV. p.* 360. in tractat. de degener. anim.)

[*b*] Peregrinus Mus, odorata celebratus pellicula, *Hieronym.* ad Demetriadem, quemque antiquiores aliqui (vid. *Gesner. de quadr. p.* 697. *et* 732.) ad Moſchum referre voluerunt, certe de Sorice moſchato eſt intelligendus, quem *Hieronymi* temporibus a Barbaris Graeci poterant accepiſſe.

cum (*Exoticor. p.* 375.) appellauerat; vnde eodem nomine ab *Aldrovando*, *Ionſtono*, *Raio*, *Kleinio* recenſitum fuit, apud quos augmenti nihil hiſtoria eiusdem naturalis accepit. Contra *Briſſonius* cum *Linnaeo*, perpenſa caudae pedumque ſimilitudine, Caſtorem moſchatum illud vocarunt. Sin reliquos recentiores auctores conſulas, non magis de genere naturali animalis ſapies. Etenim *Buffonius*, quum ſolas exuuias ſub oculis haberet, nihil omnino noui addidit, niſi iconem nitidiorem. Et *Io. Geo. Gmelin*, quamvis autopta recens deſcriberet animal (*Nou. Comm. Petrop. vol. IV. p.* 373. *ſeq.*), imperfectiſſimam tamen eius hiſtoriam reliquit, nec icone (*Vol. V. tab.* 13. addita) accuratiorem. Namque figuram quidem externam ſatis bene adumbrauit, et diſtinctiuas a Caſtore Zibethico (*Sarrazini* in *Act. pariſ.* 1725. *p.* 323. *tab. II.*) notas non neglexit; ſed in eſſentialibus et generificis characteribus ita ſupinus fuit, vt etiam "dentes, quales ſunt reliquis Murini generis" eſſe temere ſcripſerit (*l. c. p.* 373); anatomen vero curioſiſſimam plane non illuſtrauit. Neque cognitionem Soricis moſchati promouit *Gmelinus iun.* (*Itinerar. vol. I.* 28. *tab.* 3. 4.) cuius etiam icon illaudabilis. Curatiorem deinde omnibus partibus deſcriptionem germanico idiomate dedit Diligentiſſ. quondam Collega *Güldenſtaedtius* [*c*], non tamen ita exhauſit hiſtoriam animalis et praeſertim anatomen, vt ſuperfluas reddiderit obſeruationes a meipſo durante itinere conſignatas; quod noſtram cum illius deſcriptione conferentibus facile patebit.

Sorex

[*c*] Beſchaeftigungen der naturforſchenden Freunde *Tom. III. p.* 107. *tab.* 2.

Sorex moſchatus, nouo hoc nomine, vt ſtatim demonſtrabitur, iure appellandus, omnes quae innotuerunt huius generis ſpecies mole ſuperat, nec Erinaceo cedit. Videtur circumſcriptam patriam habere fluuios a ſeptentrione verſus Pontum Euxinum et Mare Caſpium tendentes, Dynaprin, Tanain, et praeſertim Volgam. An Iſtrum atque Danubium quoque frequentet, reſcire hactenus non potui. Neque in borealioribus Ruſſiae occurrere vnquam audiui, vt multo minus Lapponiae inquilinum credam; forte pelles, cum caudis pellitoribus propter odorem gratae, e Ruſſia per Lapponiam Suecis adlatae, huic famae originem dederunt. Numeroſiſſima contra per omnem tractum Volgae fluuii ſedes ſuas fixit haec ſpecies, eumque Caſaniam, imo ad Occae confluentem vsque, vltra 56^{tum} latitudinis borealis gradum, adſcendit; dum contra in vicinia Maris Caſpii maximeque auſtrali parte fluuii non obſeruatur, neque in Rhymno, magisue orientalibus Sibiriae fluentis viſa vnquam fuit. Vulgatiſſimum nomen roſſicum, praeſertim ad Volgam vſitatum, indeque cum pellibus per reliquam Roſſiam translatum, *Wychuchòl* (выхухоль), ignotae mihi originis eſt. Neque magis explicauerim ad Occam populare *Tſchurſſin* (чурсинъ) et Maloroſſis ſolemne *Ghoghul* (гогуль). Suecicum vero (*Daeſman*), quo *Buffonius* inadaequate vſus eſt, Zibethum ſignificat, quod in Pomerania affini voce germanica *Deſem* exprimunt.

Nullum inter quadrupeda mediterranea amphibiae naturae famam magis meretur hoc Sorice; maximam enim vitae partem in et ſub aquis tranſigit. Immo ſupra terram in ſiccum nunquam adſcendit, ſed cuniculis ſub terra fortuito ductis, vel inundationibus fluuii e lacu in lacum trans-

 fertur.

fertur. Quamprimum glacies ſoluta eſt, (qua lacus adſtringente non reſpirat Sorex moſchatus, niſi in antrorum ſuorum altiori parte) videas in vadis et ſuperficie lacuum et foſſarum pigrarum, quas alueo fluuii praefert, circa arundines praeſertim et radices adſtantium ripis arbuſtorum, ambulantem ſub aqua, enatantem, varioque motu ſeſe volutantem, quaerentem celerrimo roſtri motu vermiculos, ſaepiusque, reſpirationis gratia, ad ſuperficiem aquarum enitentem. Videas etiam, coelo ſereno, in ſuperficie aquae ludentes, immo in depreſſioribus ripis ad ſolem apricantes. Facillime illo tempores naſſis, ad piſces capiendos, in ſtagnis et lacubus poſitis capitur. Copioſiores tamen eſſe dicuntur autumno, prole tunc ſcilicet omni adulta.

Aquas illas praeſertim amant Sorices moſchati, quae ſtagnant vel pigrae fluunt, quaeque elatas habent ripas, in quibus cuniculos ſuos apte fodere queant, incipientes ſub aqua et oblique adſcendentes ſupra horizontalem lineam lacus, forma flexuoſorum canalium, ad vinginti et vltra pedum longitudinem ſaepe extenſorum, in ſuperficiem tamen terrae nunquam peruiorum, in quibus ſolitarii vel bini viuunt et conglaciato lacu, incluſo licet, aëre vtcunque fruuntur. Neque vero torpeſcunt, vt multa, ex ordine glirium, in cuniculis hybernantia animalia, ſed potius per totam hyemem in naſſis atque retibus ſubinde capiuntur. Attamen aëris beneficio carere nequeunt, ideoque in naſſis nonniſi ſuffocati reperiuntur, raroque viui capiuntur. Idcirco, et forſitan quod tenerioris vitae animal rudes inter manus, praeſertim ob mordacitatem, durius tractatum facile pereat, piſcatorum vulgus aſſerit, viuum non poſſe ſeruari, ſed momento fere, poſtquam aquis extrahitur, inter manus emori.

emori. Mihi propoſita praemia vix tandem viuum animal Samarae aliquoties procurauerunt, quale ſemel ſatis diu ſuperſtes ſeruaui, vt fabulam a vulgo narrari confirmauerit.

Perhibent etiam piſcatores inter alia, quae falſa deprehendi, pabulum Soricis moſchati eſſe ex Acori et Nymphaeae radicibus et foliis. Ego tamen in diſſectorum ventriculis, praeter Hirudines, Tipularum, Phryganearum, aliasque laruas, et immixtas fortuito radiculas, nihil vnquam inueni; immo ſulphureus odor interaneorum animalem diaetam euidenter arguit.

In viuo Sorice moſchato non potui ſatis admirari animalis, adſpectu bruti et inertis, motus inconditos quidem, ſed promptiſſimos et fere continuos. Roſtrum praeſertim, dum vigilat, ſumma velocitate quaquauerſum incuruat, citiſſimeque obuia quaeque pertentat et explorat tactu pariter et olfactu neruoſiſſimi huius organi, in quo quaſi ſenſum animalis omnem concentraſſe videtur natura. Auditu contra non admodum arguto pollere mihi viſus eſt; oculis vero minutiſſimis, quamuis ſemper extra palpebras turgentibus, vix quidquam niſi lucis et tenebrarum diſcrimen percipere illud poſſe ſatis certus fui. In roſtro acutiſſimus ſenſus et ad omnia paratus: Myſtaces ſuperioris inferiorisque maxillae, dum in motu eſt animal, ſemper antrorſum rigent et ſphaeram ſenſilitatis huius organi ampliorem quaſi reddunt. Vbicunque ſe tangi ſenſit, roſtrum ſtatim illuc dirigit et explorat omnia, minime (vt videtur) trepidum. Aegerrime fert, ſi durius percuſſum

fuit

ſuit roſtrum, palmis illud demulcens et in aqua agitans; caput itidem quaſſans, quaſi lutum excuſſura Sus.

In ſicco detentum animal fit inquietiſſimum et carcere elabi omnibus artubus annititur; affuſa autem aqua velut recreari videtur, aquam roſtro perluit, et labra clauſa ſubinde aperiendo plauſum ceu lambentis aquam canis excitat; vel aëre per compreſſa labia expulſo, tremuloque eorum et roſtri motu excitato inſtrepit aquis Anatis fere inſtar. Vocem vero ſponte edentem audiui nunquam. Sed dum vellicatur aliterue irritatur, ſtridorem velut Soricis vel Veſpertilionis, non tamen iteratum edit, aperto diu rictu ſimul minitans, morſuque appetens. Erigitur et non raro in plantas et clunes, quaſi circumſpectans, vere autem erecto et quaquauerſum agitato roſtro aërem et effluuia externa captans. Admouet itidem crebro roſtrum ori, imo labiis interdum ferme inſertum, lingua celerrime lambit, mihique hoc modo bibere viſum eſt. Eodem enim modo obiectos lumbricos in aqua roſtro, ceu digito collectos admouebat ori et ingerebat.

In interuallis horum motuum inquietiſſimi animalis, quando tranquillum relinquitur, ſine intermiſſione in alterutrum latus decumbit, et palmae plantaeque vnius lateris innixum, alterius plantae tremula et celerrima motitatione per totum corpus, maxime in ventre et lateribus, ſcabere et quaſi pectere atque excutere vellus amabat. Mire autem verſatiles ſunt plantae, ita vt lumbos quoque iisdem adtingere poſſit. Parum contra mouetur cauda, quae ſemper fere falcis in modum curuata iacet.

Aqua

Aqua in qua detinetur animal, ab effluuiis caudae et excrementis foetore Zibethico breui inficitur, crebroque renouari debet. Plerumque veſperi, etiam effuſa licet omni aqua, ad quietem ſe componit animal. Jacet tunc contracto corpore, anterioribus plerumque in latus proiectis et incuruato deorſum roſtro, ſub armum fere repoſito, cauda vero in ſemicirculum fere curuata et in plano latere ſtrata. Irrequietum tamen etiam in ſomno eſt, et ſtationes ſaepe mutat; reſpiratio crebra, in ſomno inaequalis et quando nares ſubinde aquae inſeruntur ſtertoroſa, cum labrorum crebro motu. Forſitan in his omnibus aliquid aegritudini incarceratorum animalium tribuendum. Neque enim diu apud me vixerunt, longiſſime triduo; niſi hoc forte debetur laeſioni quae, dum capiuntur, facile accidit. Vixerunt tamen etiam vulnerato corpore et fractis cruribus, imo cranio quoque laeſo allati, per plures horas. Vixit vnum ſpecimen, in cuius abdomine inciſo, thermometro immiſſo, calorem natiuum (98°. Farenheit.) exploraueram, per plures horas.

Per totam hyemem et vsque ad finem Aprilis crebris diſſectionibus huius animalis, nullum vnquam foecundationis in foeminis veſtigium obſeruare potui. Hinc non ante Maium menſem procreationis oeſtro incitari veroſimile eſt, adeoque partus in aeſtatem cadere debet, quo tempore rarius capiuntur etiam mares, dum reliquo anni decurſu tantum foeminas, inter copioſos mares, rarius captas obſeruarem. Ideo nec grauidas vnquam, neque prolem iuniorem videre contigit, adeoque de huius numero non conſtat; quem tamen haud exiguum eſſe concludere licet e numero papillarum mammalium octonario in foeminis, et ex

 abun-

abundantia ſpeciei; qua fit vt pelles a pellitoribus copioſe, minimoque pretio vnius vel duarum haſtularum (*Copeiki*) coëmantur.

Has quidem, quamuis ſat pulchras et vellutas, in veſtes conſuere non moris eſt, propter inhaerentem forſitan odorem Zibethicum, non omnibus gratum; interim tamen ad mitras et fimbrias veſtimentorum pelliceorum, praeſertim domeſticorum (*Tulupi*), ob ſimilitudinem quam cum Lutrae et Caſtoris vellere habent, in crebro ſunt vſu. Caudae etiam ſiccatae ſeruantur ob odorem fortiſſimum Zibethicum, diutiſſime inhaerentem, quem pelliceamentis interpoſitae communicant et tineas arcent, vt alia odoramenta. Et quidem fragrantia ichoris ſeu materiae folliculorum ſubcaudalium, quorum infra dabitur deſcriptio, ita ſubtilis eſt et diuturna, vt in Thermometro exiguo, quod experimento caloris explorandi in Sorice noſtro ſemel omnino adhibui et tunc forte digitis odore Zibethico animalis imbutis tetigeram, odor iſte nunc in quartum decimum annum ita ſuperſit, vt in ſenſum facile cadat. Non itaque mirum Lucios maiores vel Siluros, qui Soricem noſtrum in aquis natantem ſaepe deuorant, inde tam nauſeoſo Zibethi odore penetrari, vt *Schobero* (in *Memorabil. Ruſſo-aſiaticis*) notante, eſui omnino fiant inepti. Immo videtur materia hunc odorem ſuppeditans, virtute medica haud expers futura; ſiquidem a Calmuccorum ſacrificulis medicaſtris in affectibus cerebri et neruorum, non ſolum pro odoramento, ſed interno quoque vſu laudata.

Sufficiant haec de hiſtoria Soricis moſchati naturali. Iam ad deſcriptionem venio externarum partium et inter-

internae praeſertim ſtructurae, in qua venoſus maxime apparatus, amphibiae naturae mire accommodatus, admiratione dignus eſt et ſine exemplo in reliquis omnibus quadrupedibus aquaticis.

Animal, quod *Tab. III.* dimidia magnitudine naturali expreſſi, *pondere* inter XIV. et XVII. vncias variare ſolet. *Mole* Cricetos maximos ſuperat. *Habitu* externo, praeſertim forma capitis atque trunci, artuumque breuitate, Sorices reliquos aemulatur, niſi quod breuius, incultius, et capite inter armos retracto, colloque facile nullo Talpas referat; quod optime in *fig.* 1. *Tab. IV.* apparet, vbi animal vellere nudatum depingitur, quod facile obtinebis, ſi per nycthemerum aëri calidiori exponatur, et vellus digitis euellatur.

Caput pro mole corporis anguſtum, conico productum. Maxilla ſuperior in roſtrum producta, lateribus tumidula, myſtacifera. *Roſtrum* cartilagineum, mobiliſſimum, in ſtatu quietis naturaliter incuruatum (*Tab. III. et IV. fig.* 1. 2.), depreſſum (*fig.* 3.), nudum nigrum, papilloſum (*fig.* 2.); ſubtus verſus labium (*fig.* 3.) cute teneriore, carneo-albida, papillis fere deſtituta tectum; extremitate planum, ſtria impreſſa longitudinali, praeſertim ſupra exaratum, apice truncato-obtuſum, ſubdidymum. *Nares* in ipſo roſtri apice, transuerſim ouales, diuergentes, papilla molli cutacea intra aperturam a ſuperiore parte tumeſcente, ſed retractili conniuentes.

Os rictu longiuſculo, lunato hians *fig.* 3. *labra* laxa, carnoſa, mollia, nuda, tenera rubicundula, arcte conniuen-

niuentia, inciſoribus adnata. *Dentes* continua ſerie ſupra infraque XXII. *Primores* ſupra bini (*fig.* 8. 9. 11.) maximi, trigono-conoidei, facie exteriore lata, plana, poſtica excauata; *infra* quatuor conferti, porrecti, medii minores paralleli, exteriores ſubconuergentes, truncati (*fig.* 10. 11.). *Conici* (loco caninorum) paruuli, ſupra infraque ex vtroque latere ſeni; *inferiores* a primo ſenſim maiores; *ſuperiorum* ſecundus minimus, tertius reliquis maior, poſteriores tres ſubaequales. *Molares* ſupra vtrinque quatuor, infra tres, multicuſpides, pectinatim coëuntes (*fig.* 8. 9. 10.). *Palatum* rugis circiter IX. late diſtantibus. *Lingua* carnoſa, laeuiuſcula, depreſſa.

Baſis roſtri pilis rigidulis, breuioribus ſtrictis veſtita. *Myſtaces* per duodecim fere ordines vtrinque ſecundum roſtri latera fere ad orbitas vsque ſparſi, caneſcentes, labio et naſo propiores ſenſim breuiores atque teneriores. (*fig.* 2. 3.) Similes pili in V. vel VI. ordines digeſti in vtroque latere maxillae ſparſi.

Oculi mole papauerini ſeminis, nigri, ad baſin roſtri, in areola depreſſa, ebouata, albo villoſa ſatis conſpicui, toti apertura palpebrarum exſerti (*fig.* 1. 2.).

Auriculae externae nullae; *meatus* auditorius (*fig.* 1.) oblongus, ſubobliquus, intus nudus, extus villo arctiſſime conniuente clauſus, vt integro vellere ne locus quidem appareret, niſi villis ad anteriorem ſinum aperturae albidis (*Tab. III.*) denotaretur. Margo inferior aperturae auris prominentior, ad poſteriorem ſinum interius lamella transverſa, cellulaque exigua in ipſo ſinu poſteriore.

Collum

Collum nullum. *Truncus* cute tenera, alba, laxa, et ſacciformi incluſus, qua extremi tantum artus eminent, et vellere largo adhuc magis informis, oblongo-ouatus, depreſſiuſculus, poſtice ventricoſior (*Tab. III. IV. fig.* 1.). *Vellus* totius corporis laxum, molliſſimum, denſa *lanugine*, 9'''. altitudine, fuſco-caneſcente ſtratum, e qua prominent (vt in Lutrae, Caſtorisue vellere) *pili* longiores rariuſculi, pollicares, qui ad medium lanugini ſimiles, extremo recti, rigidiuſculi et laeues euadunt et vellus externe obumbrant, in ſuperiore animalis latere fuſco-nigricantem, in inferiore cano-ſubargenteum colorem inducentes. Spatium inter roſtrum et palmas fere albet. Areola albida in regione aurium.

Palmae plantaeque pentadactylae, membranis interdigitalibus palmatae, nudae, ſuperne ſquamuloſae, ſubtus papillis granulatae. *Digitus* in omnibus pedibus extimus breuior, proximus longior reliquis (*fig.* 4. 5. *a.*); *ungues* omnium albicantes.

Palmae (*fig.* 4) a carpo ad digitos pilis canis rigidulis ſuperne tectae; faſciculus penicilliformis, elongatus ſimilium pilorum paulo ſupra flexum carpi e poſtico latere cubiti extrorſum vergit. Ab hoc faſciculo, ſecundum vtrumque marginem palma vsque ad vngues ſimbriata eſt ſerie pilorum rigidorum, caneſcentium, margini arcte incumbentium.

Plantae (*fig.* 1. et 5.) magnae, planae, plicatiles, digitis planis, imbricatim coëuntibus, volis extrorſum ſpectantes, natatui aptiſſimae, dum adductae margine externo

aquam facile ſecant, reflexae expanſis et directis volis latam aquae columnam impellunt. *Digiti* harum ſubaequales, membrana integra palmati, praeter extimum cui ſubexciſa (*fig. litt. a.*). *Metatarſi* margo interior ad baſin digitorum *callo* plano (*fig.* 1. *b.*) dilatatus; exterior margo tantum pilis fimbriatus, et calcaneus ſimilibus ſordide cinereis, rigidulis munitus.

Tab. III. IV.

Cauda (*Tab. III. et IV. fig.* 1. *et* 5.) baſi coarctata, ſeu pedunculata villoſa, caetera fere piſciformis (*d*), prope pedunculum quaſi in *bulbum* incraſſata, cylindraceo-turgidula, dein verticaliter compreſſa, anceps, lineari-lanceolata; tota, vt in Caſtore, *ſquamata*, interque ſquamas *ſetulis* ſordide fuſceſcentibus, a dorſali latere crebrioribus et maioribus, hiſpidata. Curuatur cauda in latera facile, facilius deorſum in modum falcis; ſurſum ſeu dorſum verſus nonniſi vi et praeter naturam ſe reflecti patitur.

Papil-

[*d*] Ridiculum errorem *Kleinii*, ſpectati in re Zoologica viri, non poſſum ſicco pede praeterire, licet non publicus fuerit. Inueni ſcilicet in *Muſeo* quod *Breynii* fuit, Petropolin translato, caudam Soricis moſchati, cum duplici epiſtola autographa opt. *Kleinii* ad *Breynium* data, a quo ſententiam rogatus fuerat in obiecto vtrique ignoto et pro piſcis ſpecie habito. In his confirmat errorem *Kleinius* et piſciculum eſſe reſpondet moſcho pollinctum, ad Muſtelas vel Enchelyopos referendum. Riſum vix teneas, quum legeris in altera Epiſtola, ſecundis curis ſcripta, *Kleinium* caudam quadrupedis ſerio tanquam piſcem deſcribentem, mirabundum, quod os et branchiae non compareant, et quod ſingulari exemplo, ſetae inter ſquamas diſpoſitae adſint, caet. Vix ſimile noui curioſae ignorantiae in Zoologicis exemplum, niſi forte illud, vbi *Bakerus*, *Mileo* quodam confiſus, ſemen Bidentis pro nouo animalculo aquatico delineat [*Philoſ. Transact. vol. XLII. p.* 419. *tab.* 4.].

Papillae mammarum vellere latentes, ablato villo (*fig.* 1.) etiam in *maribus* conſpicuae, quatuor parium, axillare, pectorale, abdominale et inguinale. *Anus* ad pedunculum caudae, eidemque proximum praeputium ligulatum. In *foeminis* (raro, vt dixi, capiendis) eaedem *papillae* maiuſculae, cylindraceae, $\frac{2}{3}$ lin. longitudine.

Proportiones Soricis moſchati adeo ſingulares ſunt, vt ſi vnquam, certe hic, taediosa menſurarum enarratio licita ſit: ſequantur hic ergo ex animali maſculo, cuius

Longitudo tota ab apice roſtri recta extenſi, ad baſin caudae - - -	8″.	$7\frac{1}{2}$‴.
—— —— caudae - - - - -	7.	0.
—— —— pedunculi caudae - - -	0.	5.
Circumferentia eiusdem - - -	1.	5.
—— —— bulbi in initio - - -	2.	6.
Longitudo bulbi circiter - - -	1.	9.
Latitudo caudae ſumma in parte compreſſa -	0.	10.
Longitudo capitis a nucha ad nares - -	2.	9.
—— —— roſtri a labio ſuperiore - -	0.	$10\frac{1}{2}$.
Circumferentia oris ab angulo ad angulum	1.	10.
Latitudo roſtri in apice vbi paulo latius -	0.	$5\frac{1}{2}$.
Circumferentia eiusdem ante labia - -	1.	8.
—— —— pone myſtaces ad baſin - -	2.	8.
—— —— capitis trans oculos - - -	2.	11.
—— —— ad aures - - - -	3.	11.
—— —— thoracis pone armos - -	5.	6.
—— —— eiusdem loco ampliſſimo - -	6.	6.

Circum-

Circumferentia abdominis - - -	$7''$.	$0'''$.
Diſtantia oculi a naribus extenſo roſtro -	1.	$8\frac{1}{2}$.
—— —— ab oculo ad meatum auris -	0.	8.
Longitudo aperturae auris - - -	0.	5.
Eiusdem latitudo - - - -	0.	$2\frac{4}{7}$.
Interuallum oculorum directa axi - -	0.	9.
Idem filo per frontem - - -	0.	$11\frac{1}{2}$.
—— —— ſinuum auris poſticorum -	1.	10.
—— —— narium, earumque apertura -	0.	$1\frac{2}{3}$.
Longitudo palmae a flexura carpi - -	0.	$10\frac{1}{2}$.
—— —— vnguis ſeorſim - - -	0.	$3\frac{1}{4}$.
—— —— plantae a calcaneo ad vng. apic.	2.	$2\frac{1}{2}$.
—— —— vnguis ſeorſim - - -	0.	$4\frac{3}{4}$.
Latitudo plantae ad digitorum baſin - -	0.	10.
—— —— palmae ibidem - - -	0.	$6\frac{1}{3}$.
Circumferentia brachii ad carpum -	0.	$8\frac{1}{4}$.
—— —— carpi - - - -	0.	$11\frac{1}{2}$.
—— —— metacarpi - - -	1.	$\frac{1}{2}$.
—— —— tibiae ad calcaneum - -	0.	10.
—— —— tarſi prope flexuram - -	1.	3.
—— —— metatarſi in loco calli - -	1.	$7\frac{1}{2}$.

* * *

Sub diſſecta animalis pelle craſſiuſcula et alba, inſignis apparet *panniculus ſubcutaneus*, carnoſo-aponeuroticus, qui comprimendo corpori in minorem molem, dum animal fundum aquae petit, inſeruire videtur et duobus prae-

praeſertim *muſculorum* paribus debetur. Horum *inſigniores* ſunt quorum vtrinque vnus ſub axilla oritur et radiatim ſpargitur, partim ſecundum latus longitudinaliter decurrentibus, partim verſus pectus oblique expanſis, maximam vero partem ſecundum dorſum recuruatis fibris, quae obliquae et transuerſae decuſſantur et craſſiſſimum in dorſo pannum efficiunt. Supra pubem *duo alii* muſculi explanati fibris ſub cute ſparguntur. *Pinguedo* ſub hoc panniculo expanſa parcior, maxime ad inguina iliaque et ſubbrachiis. Iisdem locis vaſa craſſa, praeſertim vena culmi fere craſſitie, ex ſubclauiis et iliacis vaſis in panniculum tranſeunt.

Glandulae ſubcutaneae circa collum vtrinque tres, duo oblongae a dorſo ceruicis.

Glandulae odoriferae, ſub baſi vel bulbo caudae collectae et celluloſa tenaci connexae in agmen confertum, ſubouale (*fig.* 5.); folliculaceae, molles, ouales, ſitu omnes inter vertebras et cutem obliquo, ſubperpendiculari, ſingula ſubter caudam per cutem, cui arcte incumbunt; hians poro ſimplici. Harum in duplici ſerie maiores XIV. vel XVI. alterne poſitae, interiectis prope cutem minoribus; partim oblongis. Maiores piſum aequant, minores granum vix ſecalinum. Omnes tunica tenaci, minime vaſculoſa, luteſcente conſtant; intus cauae et ad tunicam pulpoſae, pulpa compoſita e villis albidis, linearibus, confertis, muſcarum ouula referentibus ſed longe tenerioribus. *Pori* externe circiter viginti, tot quot glandulae, in parte turgida baſeos caudae, per quincunces in ſquamarum interuallis hiantes, non conſpicui niſi preſſa cauda; tunc enim eructant *materiam* odoriferam oleoſam, colore et

conſiſtentia bene cocti puris. In folliculis haec materia continetur ſubgrumoſa, ichore quodam flaueſcente diluta. Extra folliculos emiſſa, recens penetrantiſſimum odorem ſpargit, ex moſchato-camphoratum, cephalaeam fere excitantem, ſimilisque eſt liquori oleoſo glandularum in Caſtore, ſed flauidior. Ad candelae ignem pariter vt illa olei inſtar fluit, tandemque cum ſtrepitu et detonatione quadam ſuccenditur pinguedinis animalis odore; dum contra Moſchus et Caſtoreum ad ignem ferueant tantum, tandemque ſuccenſa in flammam, cornu combuſti odorem ſpirent.

Diſſecto abdomine, etiam in recentiſſimis animalibus, ſingularis percipitur odor ſulphureus, quem in nulla alia quadrupede vnquam ſenſi, imo excrementa recto contenta nigredine et odore fere piſſaſphaltum aemulantur.

Hepar diuiſura fere vt in Marmota ruthenica, pondere drachmarum quatuor ad ſex, trilobum. *Lobus ſiniſter* (*Tab. IV. fig.* 7. *e.*) integer ſubrotundus, medio minor; *medius* (*litt. E. E.*) transuerſim oblongus, ſiniſterius pro ligamento inciſus, dexterius pro fundo cyſtidis obſolete emarginatus; *dexter* (*litt. e. e.*) craſſior, ouatus, bipartitus, infera portione triquetro-pyramidata, reni incumbente. Sub his *Spigelianus* (*litt. α.*) paruus, craſſus, papillaris. *Cyſtis* fellea (*litt. f.*) maiuscula, tenera, ſemilibera, bilem aqueam, rubicundam continens haud copioſam. *Ductus* choledochus vix ſemipollicari a pyloro diſtantia inſertus. In allegata figura *litt. g.* faſciculum vaſorum hepatis reclinati ligatum indicat.

Ventri-

Ventriculus praelongus, fundo producto, ſurſum incuruato, obtuſo; circumductum a fundi vertice ad pylorum filum 5 poll. et 8 lineas aequat vel excedit. Inſecta ventriculo contenta plerumque innatant ſaburrae aqueae fuſcae, ſulphurei foetoris, ab ingeſta forte nigra palude ortae. *Inteſtinum* a cardia paulo exampliatum, et vltima ſeſquipedali parte verſus anum etiam digitum puerilem aequat; caeterum aequabile, calami vix cygnei amplitudine, coeco, glandulisue conſpicuis nullis inſtructum, longitudine 10 ad 12 pedum pariſ.

Lien magnus, latus, planiuſculus, extus conuexus, colore humano ſimilis, antrorſum acutiuſculus, poſtice obſolete bilobus, pondere quatuor ſcrupulorum. — *Pancreas* a dorſo ventriculi et ad duodenum ſparſiſſimum, parcum. Sed *pſeudo-pancreas Aſellii* ſeu corpus lacteum in foco meſenterii inſigne, quaſi e duabus glandulis lunatis, ſublobatis, altera extremitate incraſſatis compoſitum, quarum vna ſuperiore, altera inferiore meſenterii ſuperficie, craſſiore extremitate, in diuerſa ſpectante, prominent.

Renes (*Tab. IV. fig.* 7. *b. b.*) ouati, hylo fere nullo, ſitu et magnitudine inaequales; *dexter* ſpinae dorſali propior, minor; *ſiniſter* maior, remotior, liberiorque fluctuans. *Veſica urinaria* (*litt. p.*) nucis maioris capax. Omentulum pinguedinoſum (*litt.* β.) ante veſicam epigaſtrium replet.

Maribus *teſtes* (*Fig.* 7. *r. r*) hyeme flaccidi, extra abdomen emiſſi in ſcrotum ſub pelle latens. *Vaſorum ſpermaticorum* (*litt. l. l.*) faſciculi, *epididymides* (*litt. s. s.*)

Tt 2 et

et ductus deferentes (*litt. n. n.*) inſignes. *Veſiculae* ſeminales (*litt. q.*) in vnum corpus didymum connatae, quod ſemper ad dextram partem hypogaſtrii, veſica ad ſiniſtram inclinat.

Vterus feminis breuiſſimus; *cornua* ampliuſcula, adtenuata extremitate meſenteriolo adnata et in gyros collecta.

Thorax ampliſſimus, inferiore coſtarum crate (*Fig.* 7. *a a.*) et lata cartilagine enſiformi (*litt. b.*) partem viſcerum abdominalium fouens. *Diaphragma* hinc latiſſimum, parum obliquatum. *Pulmonum ſiniſter* ſimplex indiuiſus; *dexter* maior, trilobus et lobo impare lineari, lacero, a dorſo cordis inſertus. Vterque tantum poſteriorem et dorſalem thoracis partem replent.

Cor maiuſculum. *Ductus arterioſus* optime conſpicuus, ſed nec ſanguinem, neque ſtylum ſubtilem ſetamue admittit. Videbatur aliqua adeſſe communicatio inter ſinus venoſos ampliſſimos; etenim foramen ouale velut cribro quodam reticulatum apparuit. Praecipuum Naturae prouidentis inſtitutum, ad leuandum, quando ſub aquis verſatur animal, circulationis per pulmones impedimentum, videtur in ſingulari et admirabili venarum inferiorum amplitudine poſitum eſſe. Omnes ſcilicet *venae* abdominales et artuum poſteriorum non ſolum ampliſſimae, et *iliaca* vaſa cum ramis principalibus varicoſo nodoſae, et ſingulares duae *venae* per ilia ad muſculos, panniculumque ſubcutaneam emiſſae (*Fig.* 7. *k k.*), ſanguini retardato diuerticula praebent; ſed *Vena caua* inferior, in regione lumbari, dilatata etiam eſt in *ſaccum* didymum (*litt. i.*) ampliſſimum, verſus diaphragma

con-

contractum, e quo, praeter venas ſupramemoratas, prodeunt ſpermatica vaſa (*litt. m m.* vna cum vreteribus deſignata) et ampliſſimae venae emulgentes, quarum ſiniſtra ad *litt. b.* conſpicua eſt, altera pone ſaccum venae cauae latet. Hoc ergo ſpatioſo venarum poſtici corporis apparatu obtinetur, vt animal ſine incommodo diutius reſpiratione ſub aquis carere poſſit [*d*].

Non minus mirabilem et elegantiſſimum apparatum, ſed muſculoſum et neruoſum, ſenſui et mobilitati roſtri et narium deſtinauit natura, quem *Tab. II. fig. 6.*, diſſecta cute capitis, oculis exponit. In ea figura *litt. a a a.* pellem animalis diſſectam et *litt. b.* pedem dextri lateris contractum; *c.* apicem roſtri naribus peruium, *d d.* glandulas colli, *e e.* carnes denudatas, *f.* bulbum oculi minutum neruo ſuo pedunculatum, *g g.* auris dextrae meatum abſciſſum, *h.* maxillam inferiorem et os dentatum, *i.* neruos e foramine orbitali antico ad myſtaces et tegumenta roſtri coploſe tendentes, reliquae vero litterae muſculos lumbricales vnius lateris, mouendo roſtro praeſertim deſtinatos indicant.

Hi *muſculi* a poſtica parte zygomatis, inter temporalem et maſſeteres muſculos oriuntur ventribus muſculoſis teretibus, in longos tendines filiformes adtenuatis. Adſunt vtrinque duo muſculi maiores et tres minores. Maiorum *extimus* (*litt. k.*) ipſo maſſeteri accumbit et tendine

 al-

[*d*] In *Fig. 7.* ſaepius allegata, praeter explicatas ſupra litteras, *litt. c.* indicat muſculorum abdominalium vtrinque reſectorum partem reliquam; et *litt. d d.* crura poſtica, pedibus ſupra calcaneos abſciſſis delineata; *litt. o.* autem rectum inteſtinum ligatum et abſciſſum.

alueolos legit dentium ſuperiorum, demum ſubter roſtrum decurrit ad apicem fere vsque, annulis per interualla aponeuroticis vinctus: *incuruator* roſtri. *Alter* hoc maior et profunde inter reliquos ſitus (*litt. l.*) tendine ad latus roſtri, eius baſi cartilagineae adhaereſcit et faſciculo alio vlterius pergit, adeoque rectificat et ad latus flectit roſtrum. *Tres* paruuli (*litt. m. m. m.*) fere iunctim orti, tendinibus capillaribus, inter neruos ex foramine orbitali antico per roſtrum ſparſos, decurrunt vsque ad nares, iisque mouendis ſeruiunt. Praeterea *muſculi* duo inciſores ſub roſtro, ſupra vero omnino nulli adſunt. Minorum muſculorum vnus vtrinque narium marginem externum inferiorem retrahit, adeoque aperturam comprimit; alius fungum aperturae retrahit; tertius in dilatando interiore meatu narium ſeruire videtur.

Cartilago roſtri ſeu naſalis compreſſa eſt, vtroque latere canaliculata, extremo truncata, baſi latiuſcula mobiliter adnata ſepto oſſeo, tali modo, vt in ſtatu quietis muſculorum oblique deorſum directa ſit. *Nerui* ex cerebro ad nares tendentes maximi, ſub olfactorio cribro prodeunt, vix diſtinguendi ab opticis exilibus, et eodem fere e trunco productis. *Cerebrum* animalis paulo minus drachma pendet. *Nerui* ad externum roſtrum tendentes, primo ramos ad myſtacum bulbos ſpargunt, deinde ſurculis inſignibus diuiduntur in papilloſam cutem extremitatis roſtri, magnoque faſciculo vsque ad ipſum marginem narium vtrinque continuantur; vnde ſumma ſenſilitas et vſus roſtri apparet, quibus, praeter Elephantem, in nulla forte quadrupede magis eminet.

Sce-

Sceleton Soricis moſchati varia quoque memorabilia offert, et quidem maxime formam cranii, ſcapularum et peluis. *Cranium* (*Tab. IV. fig.* 8. 9.) valde oblongum, *roſtroque* producto, ſemicylindrico, ad inciſores incraſſato et obtuſe truncato ſe diſtinguit. *Zygomata* contra ſunt tenuiſſima et antice tantum incraſſata, vbi zygomatico canali peruia et muſculis roſtri firmandis deſtinata. In *olla* cranii ſubouata, poſtice truncata, ſingulares ſunt vtrinque proceſſus lateralis, pone tympanum incipiens, conchoideus (*Fig.* 8. *a.*) et lamina oblonga, extremitate triangulata, quae a baſi occipitali antrorſum extenditur ſecundum ſuturam ſagittalem, cui adnata eſt (*Fig.* 8. *b.*). Baſis occipitalis vtrinque foramine lacero (*litt. c.*) pertuſa. *Maxillae* inferioris forma ex iconibus (*Fig.* 8. *c. et* 10.) ſatis apparet.

Vertebrarum columna robuſta, rigida, recta; colli breuiſſima, *atlante* lato, *epiſtrophaeo* ſupra lato proceſſu criſtato. *Dorſales* 13. proceſſu ſupra pleraeque (praeter 3 poſtremas) nullo; *lumbares* 6. craſſae, proceſſibus ſingulae quinis robuſtis, antrorſum inclinatis muricatae. *Os ſacrum* magnum, 5 vertebrarum plane coalitarum: quarum tres anticae vtrinque per alam robuſtam cum pelui coalitae; omnes ſupra in laminam continuam latam oſſeam, hinc inde perforatam aſſurgentes. *Cauda* vertebrarum 26. praeter apiculum; pleraeque vertebrae craſſae, cylindricae, ſubtus antrorſum proceſſibus duobus adnatis, ſulco canaliculatis, lateraliter carina longitudinali, ſupra proceſſibus binis latis obtuſis inſtructae.

Thorax ampliſſimus, depreſſo-latus; *coſtae* 13. parium, robuſtae, praeſertim apice incraſſato et lato; ſeptem ve-

verae, et duo proximae cartilaginibus cum vera vltima ferme coadunatae. *Sterni* manubrium craſſum, carinatum, craſſiſſimis et latis primae coſtae cartilaginibus ſubalatum; *corpus* vertebrarum 4; *enſis* pars oſſea dupla vertebrae longitudine, cartilagine magna, orbiculari praefixa.

Peluis magna: *iliis* mediocribus, *iſchii* et *pubis* trabibus valde elongatis, gracilibus, poſtico angulo lateſcentibus, et per iugum transuerſum graciliimum, arcuatum, cum compari cohaereſcentibus.

Scapulae, vt in Talpa, praelongae, anguſtae; *acromio* valde producto, lineari; *Criſta* poſterius in proceſſum magnum triangularem producta. *Clauiculae* robuſtiſſimae. *Humeri*, *femoraque* breuiſſima, robuſtiſſima, proceſſibus valde prominentibus mucronata. *Olecranum* valde productum. *Fibula* vix ad $\frac{1}{3}$ longitudinis a *tibia* diſtincta, vt haec quaſi anſata ſit; quod ſimiliter in murino genere:

Longitudo cranii - - - -	2″.	2‴.
—— vertebrarum colliſimul -	0.	$7\frac{1}{2}$.
—— vertebrarum dorſi - -	1.	7.
—— vertebr. lumbarium. - -	1.	1.
—— oſſis ſacri - - - -	1.	$4\frac{1}{2}$.
—— clauicularum - - -	0.	$6\frac{1}{2}$.
—— ſcapularum - - -	1.	5.
Earundem latitudo ſumma - -	0.	5.
Longitudo humeri - - -	0.	$10\frac{1}{2}$.
—— antibrachii ad articulum - -	0.	11.
—— olecrani - - - -	0.	4.
—— metatarſi medii - - -	0.	3.

Lon-

Longitudo ſterni manubrii	- - -	0″.	6‴.
—— corporis	- - -	0.	9.
—— enſis oſſeae	- - -	0.	$5\frac{1}{2}$.
—— coſtae longiſſimae ſept. et octav.		1.	$2\frac{1}{2}$.
—— Ilei ad foſſam articularem	-	0.	11.
—— foraminis oualis	- - -	0.	$8\frac{2}{3}$.
—— iugi transuerſi pubis per ſubtenſ.		0.	$7\frac{1}{4}$.
—— femoris	- - -	0.	11.
—— tibiae	- - - -	1.	$8\frac{1}{2}$.
—— metatarſi extimo proximi	-	0.	9.

SOREX MYOSURUS.

SOREX *myoſurus*, quem nunc deſcribere adgredior, non eſt e minoribus huius generis ſpeciebus. A congeneribus autem notis omnibus differt habitiore corporis gracilitate, capite magis diſtincto, pedibusque paulo procerioribus. Reliqui enim Sorices circumcaeſura trunci, capite indiſcreto et inceſſu humili atque reptabundo Talpae ſunt ſimiliores; imo, praeter Araneum, omnes quoque auriculis carent. Eorum igitur praeſentia hunc ipſum Araneum aemulatur, magnitudine vero vincit Sorex myoſurus. Si reliqua quaeras, conformationem pedum, digitorum numerum, roſtrum productum, dentes, oculorum paruitatem, cet. iis omnibus a generico charactere ne latum quidem vnguem aberrat.

In Zoologorum libris paſſim huius Soricis mentio facta eſt et icones extant, nemo tamen eum ex profeſſo accuratius deſcripſit. Albam varietatem, quae in variis Muſeis extat, apud *Sebam* (*theſ. vol.* 1. *p.* 50. *tab.* 31. *fig.* 7.) delineatur, nomine „Gliris ſeu Muris americani

 „ agre-

„agreſtis, auellanarii, albi, tenui longoque capite, roſtro„que velut ſuillo donati „ addito; quam denominationem ſecutus, repugnante quamuis roſtri producti figura, animalculum Murino generi inſeruit BRISSONIVS (*quadr. contr. p.* 122. *ſp.* 7.) „Murem virginianum album „ appellans. Quum ipſum ſpecimen, quod in Muſeo habuit *Seba*, Amſtelaedami in Collectione Mercatoris *C. P. Meyer* quondam viderim, de loco *Sebae* huc referendo et errore *Briſſonii* dubium nullum eſſe poteſt. Nimis tamen grande citata *Sebae* icone expreſſum eſt animalculum, magisque quoad magnitudinem conuenit icon altera in eodem *Theſauri Volumine tab.* 47. *fig.* 4. titulo „Muris agreſtis virginiani, albi " propoſita. Fuſcam quoque varietatem apud *Sebam* plane alio loco (*theſ. vol. II. tab.* 63. *fig.* 5. *p* 64. *n.* 5.) delineatam inuenias, quae ibi „ Mus ex Noruegia, cinereo fuſcus " appellatur; nouo argumento, quantum ſaepe in locis natalibus errauerit *Seba.* Forte non multo rectius ibi additur animalculum, talparum inſtar, erutis ſub terra antris viuere.

Incertior ſum, numne referenda huc quoque ſit rudis illa delineatio „Muris aranei capenſis " quam *Petiuerius* iconibus ſuis inſeruit (*Oper. vol. I. et Gazophyl. tab.* 23. *num.* 9. *Catal. num.* 430.) quamque ex eo in *Muſeum Muſeor.* (*Edit. germ. vol. II. tab.* 27. *f.* 2.) tranſtulit *Valentinus*; cuius verum archetypum inter picturas capenſes apud Cel. *Burmannum* viſas, et iam alibi a me citatas, inueni: vnde vere africanum animal indigitari liquet, quod, ſi diuerſum, certe Sorici myoſuro noſtro ſimillimum erit. Sed, quum ſatis certus ſim animal apud *Sebam*, erro-

errore non inſolenti, pro virginiano propoſitum, orientale vere fuiſſe; poterit etiam ad Promontorium Bonae Spei inquilinum eſſe.

Illuſtr. *Linnaeus* in *Syſt. Nat. ed. XII. p. 74. ſp. 4.* Soricem *murini* nomine deſcripſit, breuiſſimis quidem verbis, ita tamen graphice, vt eandem cum noſtro ſpeciem eſſe vix dubitandi locus ſit. Iauam patriam animalis facit, vnde et ipſe bis adlatum vidi, alterum nempe fuſcum, quod e *Muſeo* Academiae Lugduno-batauae pro deſcriptione perhumaniter communicauit olim Cel. *Allamand*, alterum album, quod cum aliis Indicis ab Amico acceptum, pro anatome ſeruiit.

Quum ſpecimina *Soricis myoſuri* niuea duo foeminea viderim, fuſcum autem Muſei Leydenſis maſculum eſſet, hanc coloris diuerſitatem ſecundum ſexus conſtantem forte eſſe, eo facilius perſuadeor, quum ſimilis coloris varietas a ſexu in Didelphide orientali, teſte *Valentyno* et *Buffonio*, obſeruetur. Non tamen diſputo, ſi quis coloris rationem aliter explicare maluerit.

Subterraneam vitam agere S. myoſurum, e roſtri figura, oculorum auricularumque paruitate et pedum nuditate ſatis euidenter apparere credo. Certiora vero de eius vitae genere, quippe qui nulla acceperim, affirmare non auſim.

Magnitudine Murem campeſtrem maiorem ſeu ſylvaticum aequat; fuſcum ſpecimen (*Tab. V. fig.* 2.) paulo

 maius

maius erat albis (*fig.* 1.). *Vellus* talpino ſimile, vel paulo laxius, obſolete nigrum vel album; cutis in partibus nudiuſculis, ore, auriculis, cauda, extremisque pedibus alba, etiam in varietate fuſca.

Roſtrum productum, vtrinque labio tumidum, apice cartilagineo, mobili, adtenuato, *naſo* terminali didymo, aperturis latera ſpectantibus (*a*). *Labium ſuperius* per roſtrum longitudinaliter fiſſum, ſulcoque inter nares excurrens (*Tab. IV. fig.* 12.), interno margine crenulatum; *frenulum* eiusdem craſſum, lobulo compreſſo dentium primorum ſuperiorum baſi interiectum. *Labium inferius* ad frenulum acutiſſimum, limbo pilis minimis ciliatum. *Dentes* proxime vt in Sorice araneo, de quibus vide Sceleti deſcriptionem. *Palati* arcus circiter decem vel duodecim, poſtici ſubbiarcuati. *Lingua* carnoſa, acuta, granulorum ſerie fimbriata.

Myſtaces per labii portionem tumidam, lateralem ſparſi pili, in ſeries obliquas ſeptem circiter ordinati, poſtici capitis fere longitudine. *Verruca* vtrinque parotica biſeta. *Puncta* vtrinque quatuor pilifera, in inferioris maxillae ramis diſpoſita, ſerie diuergente.

Oculi ad roſtri baſin minimi; *fiſſura* palpebrarum totius bulbi, qui vix milii granum ſuperat, amplitudine.

Meatus auditorii ampliſſimi; loco atrii *area* ſatis ſpatioſa verſus occiput extenſa, cui circumcreſcit *auricula* lunata,

(*a*) In *Sorice aquatico Buffonii* nares ſurſum hiantes; in *Soricis moſchati* roſtro truncato recta antrorſum patent.

lunata, rotundata, tenerrimis pilis ſubuelutina; haec ad meatum antice ſenſim deficiens, oppoſitum habet *lobulum* adnatum, rotundatum, conniuentem, extus villo obuallatum. Praeterea interne a margine auriculae *laminae* duo latae, rotundatae, margine piloſae, transuerſim verſus auriculae ſinum extenſae, multilocularem quaſi reddunt (*Tab. IV. fig.* 16.).

Truncus gracilior, minusque depreſſus, quam reliquis huius generis. *Pedes* antici vsque ad cubitos, poſtici ad medias tibias extra pellem, extremo nudiusculi, pentadactyli: *digitis* lateralibus paulo remotioribus breuioribusque, *vnguiculis* flaveſcentibus, etiam in varietate fuſca. *Volae* omnium pedum callis 2 ad carpum vel ſub metatarſo, 1 ad baſin digiti extimi, maiore 1 ad digitos duos proximos, 1 ad quartum, et minuto ad intimi digiti baſin (*Tab. IV. fig.* 14.). Plantae ad calcaneum vsque longitudinaliter glabrae, fimbriis nullis.

Cauda corpore breuior, ſubulata, baſi craſſa, nudiuſcula, *annulis* mollibus ſeu rugulis 140 — 160, paſſim coaleſcentibus verticillata, pilis exiguis, rariuſculis holoſericea, et adſperſa longioribus, arrectis, pauciſſimis.

Anus ſub caudae baſi bilabiatus, aperturae genitali coniunctus (*Tab. IV. fig.* 13. 15.). *Penis* in maſculo (*fig.* 15.) ex foſſa vuluae ſimili ante recti aperturam exſerendus, paruus, linearis. *Vuluae* ſinus intra orificii externi labia (*fig.* 13) ante canalem recti, conniuens, *clitoride* anterius adſtante papillari ſ. conica. *Mammae* inguinales: *papillae* vtrinque tres, ſerie iuxta femora diuergente

 poſi-

poſitae, anticae paulo remotiores, omnes *areola* nudinſcula, rugoſa deliteſcentes (*fig.* 13.).

Longitudo tota ab apice roſtri ad caudae baſin - - - - -	0'.	4''.	4'''.
—— —— capitis ad occiput - - -	0.	1.	5.
—— —— roſtri vsque ad oculos pariter et oris angulos - - - - -	0.	0.	$8\frac{1}{5}$.
—— —— rictus ab apice labii inferioris -	0.	0.	4.
—— —— roſtri vsque ad dentes primores ſuperiores - - - - -	0.	0.	$3\frac{1}{3}$.
Latitudo roſtri ad baſin - - - -	0.	0.	5.
Diſtantia oculorum a ſe inuicem - -	0.	0.	$4\frac{1}{4}$.
—— —— ab oculis ad aurium meatum -	0.	0.	4.
—— —— auricularum in vertice - - -	0.	0.	$4\frac{1}{2}$.
Altitudo auriculae in medio - - - -	0.	0.	$3\frac{1}{2}$.
Latitudo eiusdem ad baſin - - - -	0.	0.	5.
Longitudo pedum anticorum extra pellem -	0.	1.	1.
—— —— palmae ab extremis vnguibus ad callos - - - - -	0.	0.	$5\frac{2}{3}$.
—— —— digiti medii cum vngue - -	0.	0.	$2\frac{1}{2}$.
—— —— pedum poſticorum extra pellem -	0.	1.	3.
—— —— plantae a calcaneo ad extremos vnguiculos - - - - -	0.	0.	9.
—— —— caudae - - - -	0.	3.	4.

De-

Detracta pelle apparet *collum* muſculoſiſſimum, ſubtus glandula vtrinque maiori orbiculata, et ante illam minore oblonga puluinatum.

Panniculus ſubcutaneus ad latera inſignior; ibique, vt in muribus, apparuit *glandula* ſubcutanea in hypochondrio vtrinque medio, ſatis inſignis, horrente eo in loco pilorum vortice, nullo tamen apparente poro excretorio.

Funiculus vaſculoſus ex inguine exit, et ad vbera, quorum vix parenchyma apparuit, diſpergitur.

Muſculus vtrinque imo ex inguine ab oſſibus pubis (late diſtantibus, vt mox videbimus) ortus, genitalia externa amplectitur, in ima aluo explanatus decuſſatur et in aponeuroſin explicatur.

Oculorum bulbi vix grano milii maiores. *Muſculi* temporales $1\frac{1}{2}$ lin. fere craſſitie, maximi, totam foſſam cranii lateralem longitudinaliter explent. *Viſcera* ſic habuere.

Hepar tripartitum: *portio media* et ſuperior biſulca, media *cyſtide* diremta, *lacinia* ſiniſteriore iterum margine bifida. *Siniſtra* portio plana, lunata; *dextra* craſſa, duplex, haemiſphaeroidea, ſubtus concaua, ſubiectum fouens *lobum* diſtinctum, triquetrum.

Lien magnus, planus, lunatus, in ſiniſtro hypochondrio longitudinalis, multo poſterius deſcendens quam ventriculus, interius facie altera plana ventriculo et pan-
creati

creati adcubans, altera caua circumpoſitus reni ſiniſtro; externe conuexior.

Pancreas magnum, praecipua mole ad fundum ventriculi et lienem collectum, ſparſis acinis ſub ventriculo procurrens, ductuque prope choledochum, 2'''. a pyloro inſertum inteſtino.

Ventriculus paruus; fundi receſſu coeco ad cardiam ſiniſterius recuruus, verſus pylorum conſtrictum adtenuatus, teres, inteſtino paulo anguſtior.

Inteſtinum aequabile, calamo coruino capacius, medio paſſim ſtrictius, a pyloro ad anum circiter octo pollicum. Tripollicari a ventriculo diſtantia *glandulae* hinc inde gregales, per maculas collectae. Diſtantia $1\frac{2}{3}$ poll. ab ano ſeceſſus inteſtini conicus pro coeco adeſt, ibique inteſtinum leuiter quaſi filo coarctatum, portione ſupera paulo ampliore, infera graciliore. *Rectum* tamen denuo ſenſim ampliatum. Coecus ſinus naturali ſitu in dextro hypochondrio vel fere inguine ſitus eſt.

Renes ouales, dexter paulo maior, dimidiaque longitudine altior ſiue anterior; vterque *papilla* intus ſolitaria, praelonga, cylindraceo-conica. *Glandulae renales* ovali globoſae, luteae, vertici renum anterius impoſitae. *Veſica* vrinaria mole vix piſi paruuli (*fig.* 12. *a.*).

Vuluae et *ani* apertura communis bilabiata. Vulvae ſinus *clitoride* papillari notatus, intra labia. *Vagina* intus longitudinaliter ſtriata. *Vterus* membranaceo oſculo

intra

intra vaginam marginatus, craſſiuſculus, ſupra lunatus *cornibus* linearibus, inteſtino recto circumflexis, quibus extremis adſident *ouaria* exilia.

Pulmonum ſiniſter exiguus, lateralis, monolobus; *dexter* quadrilobus, lobis 2 dorſalibus maioribus, tertio triquetro pyramidato, cor antice amplexante, quarto impari, cordi ſubiecto, triquetro, extimoque apice lunatim ſupra diaphragma explanato.

Cor magnitudine fabae, adeoque maiuſculum, vix apice diaphragma adtingens atque vix obliquo ſitu. Ventriculorum atque auricularum ſitus vix lateralis.

SCELETON vario reſpectu ſingulare. *Cranium* (*fig.* 17. 18.) longiuſculum, ad molares latum, zygomate plane nullo, quamuis angulus ad molares ſubacutus et tempora ſint longitudinaliter carinata.

Maxilla inferior (*fig.* 19.) proceſſu coronoideo lato per foſſam temporalem adſcendit, angulo autem in proceſſum longum, arcuatum, obtuſum producitur.

Dentes primores gemini magni, ſubulato-compreſſi, obtuſiuſculi, conuergentes, apice contigui; *ſuperiores* incurui, ad baſin poſtice apophyſi conica inſtructi; *inferiores* longiores, protenſi, arcuati.

Canini conſerti, ſubimbricati, conico obtuſi, *ſupra* tres, maior ad primores et duo minores; *infra* duo aequales, ſuperiorum maiori pares.

Molares multicuſpido-laceri; ſupra latiſſimi, introrſum praerupti; inferiorum poſticus minor (*fig.* 12. 13.).

Vertebrae colli ſeptem; *atlas* medio ſubtus dente, *epiſtropheus* ſuperius criſta longitudinali, lata, prominens; *Sexta* vertebra ſubtus vtrinque longitudinali proceſſu ſ. criſta prominet, quae ad primam fere dorſi vertebram excurrit.

Dorſi vertebrae 14. Secunda a dorſo ſola *dente* ſubreclinato prominens.

Lumbares vertebrae 8. *Oſſis ſacri* portiones tres, quarum tantummodo prima vtrinque articularis eſt, reliquae teretiuſculae. *Cauda* conſtat vertebris 17. praeter mucronem terminalem.

Coſtae 14. verae 7. prima manubrio ſterni inſerta per latiſſimam cartilaginem. *Manubrium* ſterni ipſum ſubrhombeum, transuerſim productum. Vertebrae praeterea ſterni, praeter cartilaginem enſiformem, quinae, quarum priores cylindraceae, poſteriores ſenſim complanatae.

Scapulae acromion extus ad angulum rectum proceſſu longo, plano productum.

Peluis

Peluis oſſa annulari ſua parte ſubtus vltra os ſacrum fere non, ad dorſum paulo magis prominula ſunt, adeoque ſubtus latiſſimo interuallo diſtant (*fig.* 20.).

Fibulae breuiſſimae, *tibiis* coadunatae, vt hae quaſi anſatae ſint;

Longitudo cranii a margine foraminis occipitalis ad interuallum dentium primorum -	0′.	1″.	$\frac{1}{4}$‴.
—— —— eiusdem a criſtae occipitalis angulo - - - -	0.	0.	$11\frac{1}{3}$.
—— —— maxillae infer. a proceſſu anguli ad dentes - - - -	0.	0.	$6\frac{2}{3}$.
—— —— dentium primorum inferiorum extra alueolos - - -	0.	0.	$2\frac{1}{3}$.
—— —— ſpinae dorſi vsque in apicem caudae - - - -	0.	4.	8.
—— —— vertebrarum colli - -	0.	0.	5.
—— —— —— —— dorſi - - -	0.	0.	$11\frac{1}{2}$.
—— —— —— —— lumborum - -	0	0.	6.
—— —— oſſis ſacri - - - -	0.	0.	5.
—— —— —— ſterni - - - -	0.	0.	$7\frac{1}{2}$.
—— —— cartilaginis xiphoidis - - -	0.	0.	$2\frac{1}{2}$.
—— —— clanicularum - - - -	0.	0.	$4\frac{1}{6}$.
—— —— ſcapularum fere - - -	0.	0.	5.

 Longi-

Longitudo humerorum - - -	0.	0.	6.
— — radii - - - -	0.	0.	5.
— — vlnae - - - -	0.	0.	$6\frac{1}{3}$.
— — oſſium innominatorum - -	0.	0.	8.
Interuallum oſſium pubis - - -	0.	0.	$1\frac{1}{4}$.
Longitudo femorum - - - -	0.	0.	$8\frac{1}{2}$.
— — tibiarum - - - - -	0.	0.	$6\frac{1}{2}$.
— — trabeculae, quae eſt loco fibulae -	0.	0.	3.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

EXAMEN CRITICVM OBSERVATIONVM A CELEB. MESSIER CIRCA COMETAM ANNI 1770 INSTITVARVM

Auctore
A. J. LEXELL.

§. 1.

Poſtquam disquiſitionibus non minus prolixis, quam operoſis, tempus Periodicum pro Cometa Anno 1770 obſeruato ſtabilire conatus ſim, mirum vtique videri poſſet, quod hoc argumentum toties a me tractatum denuo in ſcenam reuocare velim: aequum igitur quoque eſt, vt praeſentis inſtituti rationes perſpicue exponam. In prioribus ſcilicet meis inueſtigationibus ita mihi perſuaſi, mearum non eſſe partium, vt de exactitudine obſeruationum circa Cometam hunc inſtitutarum ſollicite inquirerem; quippe quum videretur tuto praeſupponi debere, quod inſigni-

ſignioribus erroribus obnoxiae eſſe non poſſint, ſiquidem a ſollertiſſimo Aſtronomo inſtitutae eſſent, tumque ſingulae inter ſe egregio conſenſu conſpirarent. Verum quum nuper Illuſtris quidam Aſtronomus ſignificauerit ſe de meorum calculorum veritate eo minus eſſe perſuaſum, quod obſeruationes, quibus inniterentur, ad certas et infallibiles concluſiones deducere non poſſent; operae pretium iudicaui, vt inquirerem quodnam, meritum huic dicto Celeberrimi iſtius Aſtronomi ſtatui debeat.

§. 2. Optandum ſane fuiſſet, vt Celebris iſte Aſtronomus rationes expoſuiſſet, quae eum inducerent, vt de obſeruationibus Celeb. *Meſſier* dubitandum eſſe, aſſeueraret; quum vero id intermiſerit, videamus quibus de cauſſis huiusmodi dubium ſuboriri poſſet. Hic igitur ante omnia fatendum eſt, in obſeruationes erroris ſuſpicionem cadere, ſi nullo modo ad conſenſum inter ſe redigi queant, id eſt ſi dum obſeruationes pluribus diebus ſe inſequentibus inſtitutae, ſecundum regulas interpolationum examinentur, inſignes reperiantur aberrationes, tumque ſi nullam ſpeciem ſectionis Conicae detegere liceat, quae non enormiter a quibusdam harum obſeruationum aberraret. At de obſeruationibus Cel. *Meſſier* circa Cometam Anni 1770 factis, conſtat, quod tam prima quam ſecunda huius Cometae apparitione, Celebris hic Aſtronomus, ſingulari ſollertia, multiplices circa hunc Cometam ſingulis diebus inſtituerit obſeruationes, quae egregio conſenſu inter ſe colludunt; ſic pro die 10 Auguſti, quo ſeptem inſtitutae habentur obſeruationes, maximus earum diſſenſus, quoad Longitudinem, vnum Minutum primum non excedit. Praeterea vero ex mea Diſſertatione de orbita huius

ſus Cometae, perſpicuum eſt, Elementa a me exhibita tam bene obſeruationibus ſatisfacere, vt non niſi pro binis vel tribus diſſenſus loci Cometae calculo ſtabiliti ab obſeruato, vnum minutum primum ſuperet; de quibus obſeruationibus caeteroquin ſuſpicio quaedam eſt, quod erroribus obnoxiae eſſe queant.

§. 3. Hac igitur de cauſſa exiſtimauerim, ex ipſa harum obſeruationum indole vix quodpiam dubium de earum exactitudine formari poſſe; nec alia mihi ratio probabilis ſuppetere videtur, vnde huiusmodi dubium originem ducere poſſet, niſi quod veriſimilitudine deſtituatur, Cometam qui quinque annis et ſeptem menſibus Periodum ſuam circa Solem abſoluit, nunquam niſi Anno 1770 fuiſſe obſeruatum. Ex quo ſi concluſio pro tempore Periodico inuenta, iudicetur abſona, omnino inferendum eſt obſeruationes, in quibus fundatur, oppido eſſe falſas. Contra hanc argumenta ſubducendi rationem cum varia regeri poſſent, tamen pro praeſenti negotio, dum hoc dubium funditus euertere conabimur, primum quidem ſupponamus iſtud argumentum nulli fallaciae eſſe obnoxium. Quod ſi igitur quispiam ita ſibi perſuaſerit, tempus Periodicum Cometae a me propoſitum cum veritate conſiſtere non poſſe, hincque obſeruationes Cel. *Meſſier* eſſe erroneas, ſaltem fatebitur certos limites praeſcribi, quos hi errores ſupergredi nequeant. Ita ſi quis ſuſpicetur obſeruationibus die 1 et 2 Octobris inſtitutis, errores haud exiguos ineſſe, tamen facile largietur, illos vix ac ne vix quidem quindecim minuta prima reſpectu Longitudinis excedere debere.

§. 4. Si argumentum modo propoſitum rite ſe haberet, etiam eadem ratione valeret, ſi tempus Periodicum Cometae aliquantum augeretur; ita non dubito quin illi, qui pro abſurdo iudicent, quod Cometae tempus Periodicum ſit quinque annorum et ſeptem menſium, etiam tempus Periodicum decem annorum tanquam abſonum reiicere debeant. In eo igitur mea verſabitur opera, vt oſtendam ſuppoſito tempore Periodico decem annorum eiusmodi errores obſeruationibus Cometae induci, qui nullo modo locum habere poſſunt; hincque pro certo ſtatui poſſe, tempus Periodicum Cometae minus eſſe quam decem annorum. Quod ſi demonſtrare valeam, ſimul id obtinebo, vt perſpiciatur dubium modo allatum nullius plane eſſe momenti; nam ſe infallibili argumento oſtendi queat Cometae tempus Periodicum minus eſſe debere quam decem annorum, nulla amplius ſuppetet ratio, cur tempus Periodicum quinque annorum ſeptem menſium pro abſurdo haberi debeat.

§. 5. Quod ſi obſeruationum tam prima, quam ſecunda Cometae apparitione inſtitutarum rationem habere voluiſſem, pro tempore Periodico decem annorum, multo quidem maioribus erroribus obſeruationes obnoxiae redditae fuiſſent, quam dum orbita quaeritur, quae pro iſto tempore Periodico obſeruationibus ſecundae tantum apparitionis ſatisfacere debeat; verum vt res in compendium redigeretur, ſufficere exiſtimaui, quod demonſtrare valerem pro obſeruationibus ſecundae apparitionis maxima incongrua admitti debere, ſi tempus Periodicum decem annorum ſtabiliatur. Porro quia Latitudines Cometae ſecunda eius apparitione obſeruatae valde exiguae habentur, facile

cile perſpicitur, nulla difficultate orbitam ita inſtrui poſſe, vt illis ſatisfaciat, modo Longitudinibus Cometae fuerit conſentiens. Et quum inclinatio orbitae valde quoque ſit exigua, hinc iſtud inſigne compendium pro noſtra inueſtigatione nacti ſumus, vt orbitam in plano Eclipticae deſcriptam quaerere neceſſum ſolummodo habuerimus, quae Longitudinibus Cometae ſatisfaceret. Vbi quum tempus Periodicum Cometae iam ſupponeretur cognitum, ſi inſuper aliquod reliquorum Elementorum pro dato aſſumatur, per binas Cometae obſeruationes, reliqua Elementa, quibus orbita perfecte determinatur, innoteſcere neceſſum erat.

§. 6. Primum igitur poſita ſemiparametro pro orbita Cometae $= 1, 2589255$, cuius Logarithmus eſt $= 0, 1000000$, habetur Diſtantia Perihelii $= 0, 6791455$ et Excentricitas orbitae $= 0, 8536818$, tumque ſi opera detur vt obſeruationibus, diebus 2 et 29 Aug. inſtitutis, ſatisfiat, erit tempus Perihelii $= 15, 2177$ Auguſti et Elongatio Cometae a ☋ $= 46°. 10'. 13''$, exiſtente Longitudine Nodi aſcendentis $4^s. 12°. 0'$. His autem Elementis adhibitis, reperietur pro 12 Aug. $14^h. 46'. 25''$. Longitudo Cometae $3^s. 10°. 44'. 7''$, Longitudine obſeruata exiſtente $3^s. 10°. 34'. 48''$, ideoque diſſenſu obſeruationis a calculo $9'. 19''$. emergente. Deinde pro 1 Octob. $15^h. 23'. 22''$ fiet Longitudo Cometae $4^s. 9°. 44'. 43''$, quae obſeruata fuit $4^s. 10°. 12'. 6''$, obſeruationis a calculo diſſenſu exiſtente $27'. 23''$, qualem errorem vix quiſpiam in hac obſeruatione ſuſpicabitur, idque eo minus, quod ex comparatione obſeruationis die 1 Octob. inſtitutae, cum illa quae die 29 Septemb. facta eſt, innoteſcat, Longitudinem hanc

 per

per calculum ſtabilitam, integro die tempus commemoratum praeuertere.

§. 7. Interim tamen ſi quis exiſtimaret, manente valore ſemiparametri, ſiue tempus Perihelii ſiue Elongationem Perihelii a Nodo ita immutari poſſe, vt error obſeruationis pro die 1 Octob. ad valores aliquanto probabiliores deprimatur; examinandum erat, quid tum fieret de obſeruationibus menſe Auguſti inſtitutis. Suppoſito igitur tempore Perihelii 14, 5895 Auguſti, reliquis autem Elementis prorſus vt antea retentis, fiet pro 2 Aug. $15^h. 3'. 15''$ Longitudo Cometae $3^s. 5^o. 11'. 14''$, quae ab obſeruata $51'. 18''$ differt; at pro die 12 Aug. $14^h. 46'. 25''$, erit Longitudo $3^s. 10^o. 15'. 8''$, ideoque obſeruata $19'. 40''$ minor; tum vero pro 29 Aug. $15^h. 21'. 53''$ habebitur Longitudo $= 3^s. 20^o. 55'. 18''$; quae ab obſeruata $4'. 45''$ differt; denique Longitudo pro 1 Octob. $15^h. 23'. 22''$, erit $4^s. 9'. 46'. 19''$, vnde colligitur mutatione temporis Perihelii errorem, qui in obſeruatione 1. Octob. reperiretur, vix deprimi poſſe.

§. 8. Deinde alter modus qui ſuppetit, pro deprimendo iſto errore, erit ſi elongatio a Nodo modo propoſita augeatur. Ponamus igitur illam eſſe $46^o. 30'. 13''$, tumque reliquis Elementis vt antea manentibus, erunt Longitudines Cometae ex calculo deductae:

					Differ. ab obſeru.	
2. Aug.	$3^s.$	$5^o.$	$41'.$	$47''.$	$20'.$	$45''.$
12. -	3.	10.	36.	23.	1.	35.
29. -	3.	21.	4.	6.	4.	3.
1. Octob.	4.	9.	56.	7.	15.	59.

vnde

vnde iam colligitur nec hoc remedio id obtineri poſſe, vt errores obſeruationum veriſimiliores reddantur, quippe quum nunc obſeruationi die 2 Aug. inſtitutae, error omni probabilitate deſtitutus inducatur.

§. 9. Nec praeſumi omnino poteſt, tempori Perihelii et elongationi eius a nodo ſimul eiusmodi tribuere licere mutationes, vt dum error pro obſeruatione 1 Octob. inſtituta ſenſibiliter deprimatur, eodem tempore obſeruationibus menſe Auguſti inſtitutis exacte ſatisfiat, id quod ſequenti ſpecimine patet. Ponatur nimirum, tempus Perihelii incidere in 15, 5301 Auguſti et elongationem Perihelii a nodo eſſe 46°. 36′. 13″, eruntque Longitudines Cometae ex his Elementis deductae:

2. Aug.	3ˢ.	6°.	4′.	25″.
12. -	3.	10.	48.	35.
29. -	3.	21.	8.	6.
1. Octob.	4.	9.	58.	46.

Ex quo igitur concluditur pro aſſumto valore ſemiparametri, ſi obſeruationi die 1 Octob. factae aberratio tribuatur 13 Minut. primorum et obſeruationi 2 Aug. inſtitutae intra bina Minuta prima ſatisfiat, tum obſeruationi die 12 Aug. factae errorem ineſſe 14 Minut. primorum, cuiusmodi errorem huic obſeruationi tribui poſſe, ne vllam quidem prae ſe fert veriſimilitudinis ſpeciem. Et ſi Elementa Cometae denuo ita immutarentur, vt locus Cometae pro 2 Aug., binis minutis primis ab obſeruato deficeret, tamen hac mutatione error pro obſeruatione die 12 Aug. inſtituta vix plus quam binis minutis primis deprimi poterit, ſuppoſito nimirum errore pro obſeruatione diei 1 Octob.

 13

13 Minut. primorum. Multo vero maioribus erroribus obſeruatio pro die 12 Aug. redderetur obnoxia, ſi adhibito iſto valore ſemiparametri, obſeruatio die 1 Octob. facta, aut plane ab omni errore reddenda ſit immunis, aut error ipſi ſit tribuendus, qui illi quem ſupra admiſimus, plane ſit contrarius, ſuppoſito ſimul quod obſeruatio die 2 Aug. facta, vel plane ſit exacta, vel non niſi leuiuſculo quodam errore afficiatur.

§. 10. Quum pro ſupra adhibito valore ſemiparametri, iam perſpicue euictum ſit, praeſtare non poſſe, vt poſito tempore Periodico decem annorum, obſeruationes non niſi erroribus veritatis ſpeciem habentibus, adficiantur; nunc quoque examinandum eſt, quales reperiantur concluſiones, ſi valor ſemiparametri aliquantum immutetur. Poſito igitur quod pro ſemiparametro habeatur hic valor 1, 3182567, cuius Logarithmus eſt $=$ 0, 1200000, erit diſtantia Perihelii $=$ 0, 7140530 et Excentricitas orbitae $=$ 0, 8461620; at ſi iterum obſeruationibus diebus 2 et 29 Auguſti inſtitutis ſatisfaciendum fuerit, erit tempus quo Cometa per Perihelium tranſit 23, 3991 Auguſti et Elongatio Perihelii a Nodo deſcendente $= 51^{\circ}. 39'. 0''$, tum vero colligetur pro 12 Aug. Longitudo Cometae $= 3^{s}. 11^{\circ}. 25'. 45''$ et pro 1 Octob. $4^{s}. 10^{\circ}. 15'. 22''$, vbi quidem poſterior obſeruatam non niſi tribus Minutis primis ſuperat; in priori autem iam error reperitur 51 Min. primorum, quem errorem vt abſonum, vnusquisque non poterit non reiicere.

§. 11. Quum aliqualis mutatio in tempore Perihelii, parum ſenſibiles mutationes pro Longitudine Cometae

tae ad diem 1 Octob. producat, examinemus quid huiusmodi mutatio in reliquis obſeruationibus efficere valeat. Supponamus itaque tempus Perihelii incidere in 23, 2391 Aug. reliquis Elementis orbitae vt ſupra manentibus, eruntque Longitudines Cometae ex his Elementis deductae, ſequentes:

		Differ. ab obſeru.
pro 2 Aug.	$3^s. 5^\circ. 40'. 14''$	$22'. 18''$.
19 - -	3. 11. 13. 5.	38. 17.
29 - -	3. 20. 56. 30.	3. 33.
1 Octob.	4. 10. 15. 19.	3. 13.

vbi quidem error pro 12 Auguſti iam aliquantum imminutus eſt; at pro obſeruatione die 2 Aug. facta ſatis ſenſibilis error emergit, et facile quidem perſpicitur hunc errorem multum ſuperare illam quantitatem, qua error pro 12 Aug. decreuit.

§. 12. Perinde omnino res ſe habebit, ſi Elongationi Perihelii a Nodo aliqua eius generis tribuatur mutatio, vt error pro obſeruatione diei 12 Aug. minuatur; ponamus ſcilicet eſſe elongationem a Nodo $52^\circ. 0'. 0''$, et reliquis Elementis vt ſupra manentibus, fient Longitudines Cometae:

		Differ. ab obſeru.
pro 2 Aug.	$3^s. 5^\circ. 18'. 19''$.	$44'. 13''$.
12 - -	3. 10. 54. 2.	19. 13.
29 - -	3. 20. 55. 22.	4. 41.
1 Octob.	4. 9. 55. 37.	16. 29.

vbi igitur nouus error in obſeruationem die 2 Aug factam inductus, multum ſuperat illum, quo obſeruatio die 12

Aug.

Aug. decreuit. Nec heic omnino ſuccedet contrarii nominis mutationes tempori Perihelii et elongationi eius a Nodo tribuendo, obſeruationes die 2 et 12 Aug. factas inter ſe conciliare, niſi iterum enormis error pro 1 Octob. admittendus ſit. Quod ſi autem ſupponatur iſtum errorem quindecim minuta prima non ſuperare, ſaltem in vna vel altera iſtarum obſeruationum diebus 2 et 12 Aug. factarum error reperietur decem minuta prima exſuperans, quem vnusquisque pro his obſeruationibus abſurdum eſſe fatebitur.

§. 13. Nunc igitur oppido liquet, aſſumto iſto valore ſemiparametri 1,3182567 eiusmodi Elementa Cometae non inueniri poſſe, quae pro tempore Periodico decem annorum, ita obſeruationibus ſatisfacerent, vt errores non niſi valde probabiles locum haberent; verum tamen vt demonſtretur nulla eiusmodi Elementa inueniri poſſe, quicunque pro ſemiparametro ſtatuatur valor, probandum eſt huiusmodi valorem, ſiue priori noſtra ſuppoſitione 1,2589746 minorem, ſiue inter 1,2589746 et 1,3182567 intermedium, ſeu denique poſteriori ſuppoſitione 1,3182567 maiorem, Elementa pro orbita Cometae praebere, quae nullo modo cum obſeruationibus conciliari poſſunt. Antequam vero hanc disquiſitionem ſuſcipiamus, nonnullas ſequelas ex prioribus noſtris calculis deducendas, praemittere conueniet. Si igitur obſeruationibus dierum 2 et 29 Aug. ſatisfaciendum ſit, facile patet id adhibito valore ſemiparametri minore quam 1,2589746 fieri non poſſe, niſi error obſeruationis die 1 Octob. inſtitutae vltra 27 Minut. prima augeatur, contra vero inuenietur valor ſemiparametri iſto allato aliquantum minor, pro quo error obſeruationis die

12

12 Aug. inſtitutae plane euaneſcet. Simili ratione ſi valor ſemiparametri ſtatuatur maior quam 1, 3182567, obſeruationibus dier. 2 et 29 Aug. ſatisfaciendo, errores pro obſeruationibus dier. 12 Aug. et 1 Octob. continuo magis increſcent; vnde neceſſaria conſequentia deducitur, ſi obſeruationes dier. 2 et 29 Auguſti plane exactae ſint, valores ſemiparametri nec minores quam 1, 2589746, nec maiores quam 1, 3182567, nec vllos inter hos intermedios admitti poſſe, qui reliquis obſeruationibus veriſimili ratione ſatisfacerent.

§. 14. Attamen quum facile fieri queat, vt his obſeruationibus dier. 2 et 29 Aug. leuiuſculi quidam inſint errores, vnius ſcilicet vel alterius minuti primi, videamus quid pro huiusmodi ſuppoſitione cenſendum ſit de elementis orbitae tempori Periodico decem annorum accommodatis. Et primum quidem ex §§. 11. et 12. colligitur, ſemiparametrum maiorem quam 1, 3182567 accipi non poſſe, quia inſignis iſte error in obſeruatione diei 12 Aug. nullo modo tolli poſſet, niſi error aeque parum veriſimilis in obſeruationem die 1 Octob. factam inducatur. Caeterum tam ex his modo citatis §§. quam §. 9. conſtat, quod ſi pro obſeruatione die 1 Octob. error intra quindecim minuta prima contineatur, fieri neceſſum eſſe, vt tam pro valore ſemiparametri 1 2589746, quam 1,3182567, in vna vel altera iſtarum obſeruationum diebus 2 et 12 Aug. factarum, errores omni probabilitate deſtituti reperiantur. Immo vero, etiamſi valor ſemiparametri minor ponatur quam 1, 2589746, error pro obſeruatione die 1 Octob. facta quindecim minutis primis concludi non poteſt, niſi vna vel altera iſtarum obſeruationum diebus 2 et 12

Aug. factarum, erroribus valde magnis afficiantur. Quin etiam his caſibus errores pro obſeruatione die 29 Aug. inſtituta, valde increſcere oportet. Nam prouti ex §. 9. liquet, niſi enormes errores obſeruationibus pro 2 et 12 Aug. inducere velimus, neceſſum eſt, vt tempori Perihelii et elongationi Perihelii a nodo eiusmodi tribuantur variationes, quae contrarios pro locis Cometae ad dies commemoratos computatis producunt effectus; at pro obſeruatione die 29 Aug. inſtituta effectus hinc oriundi eiusdem erunt nominis, ideoque inſeruient ad hanc obſeruationem continuo magis magisque erroneam reddendam.

§. 15. Hinc igitur ſatis tuto colligere poſſumus, quod ſi iſta praeſcribatur conditio, vt in obſeruationibus ad initium Octobris inſtitutis errores non admitti poſſint, qui quindecim minuta prima excedant, Elementa Cometae pro tempore Periodico decem annorum nequaquam inueniri poſſe, quae cum obſeruationibus menſe Auguſti inſtitutis inter decem minuta prima congruant. Caeterum ſi concluſiones in §. 9. inuentas conſideremus, perſpicuum erit errorem in obſeruatione die 1 Octobris ſatis probabiliter ſub eiusmodi hypotheſi temporis Periodici, ſtatui debere poſitiuum, et ſi conditio admittatur quod iſte error 15 Minuta prima excedere non debeat, errorem pro obſeruatione die 29 Aug. certe fieri negatiuum; vnde cum interuallum temporis inter has obſeruationes non ſit niſi vnius menſis et obſeruationes intermediae cum his aequabili tenore procedant, neceſſum eſt, vt errores obſeruationum poſt 29 Aug. inſtitutarum negatiui continuo minuantur, qui cum pro obſeruationibus menſe Septembris inſtitutis alicubi euanuerint, deinde in poſitiuos abibunt.

§. 16.

§. 16. Verum quum facile fieri queat, vt quae iam ratiocinati ſumus, non ſatis perſpicua videantur, aliud argumentum proponamus, quo res extra omnem dubitationis aleam ponatur. Quia igitur obſeruationes diebus 2, 12, 29 Aug. et 1 Octobr. inſtitutae, illae ſunt, quas in noſtris disquiſitionibus praecipue contemplati ſumus, examinare placebit, quales reperiantur concluſiones pro quarta harum obſeruationum, dum tribus earundem errores non prorſus a veriſimilitudine abludentes tribuuntur. Si quidem vero Menſe Auguſti circa hunc Cometam fere ſingulis diebus a Celeb. *Meſſier* multiplices inſtitutae ſunt obſeruationes, errores qui obſeruationibus hoc menſe inſtitutis ineſſe poſſunt, ſiue poſitiui, ſiue negatiui ſtatuantur, vix tria minuta prima excedere poterunt. Obſeruatio autem die 1 Octobr. vtcunque dubia eſſe poterit, tamen vix quisquam ſibi perſuadebit, errorem quo illa afficitur quindecim minuta prima, excedere. Supponamus igitur obſeruatione die 1 Octobr. factae errorem ineſſe 15 Minut. primor. poſitiuum, ita vt haec obſeruatio locum Cometae ſuppetere debuiſſet $4^s. 9^\circ. 57'$; tumque ſtatuamus obſeruationibus dier. 2 et 29 Aug. errores trium minut: primorum ineſſe ſiue poſitiuos, ſiue negatiuos, et examinemus quales errores hinc obſeruationi die 12 Aug. inſtitutae inducantur. Quatuor igitur hypotheſes heic conſiderandae iſtae ſunt, quibus ſupponuntur:

		Longit. Cometae.			Longit. Cometae.	
pro	2 Aug.	$3^s. 5^\circ. 59'. 30''$	I	2 Aug.	$3^s. 5^\circ. 59'. 30''$	II
	29 Aug.	3. 20. 57. 0		29 Aug.	3. 21. 3. 0	
pro	2 Aug.	3. 6. 5. 30	III	2 Aug.	3. 6. 5. 30	IV.
	29 Aug.	3. 20. 57. 0		29 Aug.	3. 21. 3. 0	

§. 17. Quoniam valde operoſum fuiſſet, ſi eiusmodi praeciſe Elementa inueſtigare voluiſſemus, quae his quatuor hypotheſibus ſatisfaciant, rem in compendium redigere ſtatuimus, inquirendo, quid fieret ſi pro dato valore ſemiparametri, aſſumtis Longitudinibus pro 2 Aug. et 1 Octobr. ſatisfaciendum ſit. Binos igitur valores pro ſemiparametro adhibendo, qui erant

1, 2882495 et 1, 2589255,

concluſiones ex noſtris calculis inuentae pro hypotheſi, qua Longitudo Cometae 2 Aug. ſtatuitur 3ˢ. 5°. 59′. ſe habent, vt ſequitur:

Semipar. 1, 2882495	Semipar. 1, 2589255
Temp. Perihelii 18, 8950 Aug.	Temp. Perihelii 15, 4526 Aug.
Elong. Perih. a ☋ = 48°.41′.56″.	Elong. Perih. a ☋ = 46°.33′.21″.
Long.Com. 12 Aug. 3ˢ.10°.52′.30″.	Long.Com. 12 Aug. 3ˢ.10°.46′. 4″.
29 - 3. 20. 52. 28.	29 - 3. 21. 6. 55.

Tum vero pro hypotheſi, qua Longitudo Cometae pro 2 Aug. tribus minutis vera maior ſtatuitur, concluſiones ſequentes inuentae ſunt:

Semipar. 1, 2882495	Semipar. 1, 2589255
Elong. Perih. a ☋ = 48°.42′. 8″.	Elong. Perih. a ☋ = 46°.33′.38″.
Temp. Perihelii = 18, 9470 Aug.	Temp. Perih. = 15, 5156 Aug.
Long.Com. 2 Aug. = 3ˢ. 6°. 5′.35″.	Long.Com. 2 Aug. = 3ˢ. 6°. 5′.51″.
12 - = 3. 10. 55. 32.	12 = = 3. 10. 49. 0.
29 - = 3. 20. 53. 17.	29 = = 3. 21. 7. 36.

§. 18. Ex his calculis perſpicuum fit, ſiue Longitudo pro 29 Aug. ſupponatur 3ˢ. 20°. 57′, ſiue 3ˢ. 21°. 3′, Elementa iſtis hypotheſibus accommodata neceſſario cadere

re debere inter concluſiones ex noſtris calculis deductas, ideoque Longitudinem pro 12 Aug. ex iſtis Elementis neceſſario maiorem prodire debere, quam 3ˢ. 10°. 46′; vnde quoque colligitur pro quatuor noſtris hypotheſibus, errorem qui huic obſeruationi inducitur 12 Minuta prima certe ſuperare; qualem errorem vix quispiam cum vlla veriſimilitudinis ſpecie huic obſeruationi tribuere poterit. Tum vero ex noſtris calculis colligitur, quod etiamſi obſeruationi die 29 Aug. inſtitutae maiores tribuantur errores ſiue poſitiui, ſiue negatiui, vtpote ſex minut. primorum, modo errores qui obſeruationi die 2 Aug. inſtitutae inſunt limites praeſcriptos non excedant, errorem pro obſeruatione die 12 Aug. facta infra 12 Minut. prima non deprimi poſſe. Immo vero quia variatio ſex minutor: primorum pro loco Cometae die 2 Aug. non niſi variationem trium minutorum pro loco eius die 12 Aug. producat, facile perſpicitur quodſi Longitudo Cometae pro 2 Aug. vltra omnem veriſimilitudinem ſex minutis primis minueretur, tamen obſeruationi diei 12 Aug ſaltem errorem 10 Minut. primorum ineſſe debere. Hinc itaque neceſſaria conſequentia iſta deducitur concluſio: *quod ſi pro obſeruatione die 1 Octobr. facta admittatur error 15 Minut. primorum poſitiuus, et ſi obſeruationibus diebus 2 et 29 Aug. inſtitutis, ita ſatisfaciendum ſit vt illis errores non niſi veriſimiles tribuantur, tum obſeruationi diei 12 Aug. certe ineſſe debere errorem 10 Minut. prima excedentem, quem abſurdum eſſe, nemo non fatebitur.*

§. 19. Quum ex praecedentibus calculis ſatis liquido mihi conſtaret, ſuppoſitionem maxime fauorabilem pro diminuendo errore obſeruationis die 12 Aug. factae,

illam eſſe, qua obſeruationi 1 Octobr. error poſitiuus tribuitur; tamen vt aliis quoque hoc pateſceret, examinandum eſſe conſtitui, quid fieret ſi obſeruationi die 1 Oct. factae, nullus tribuatur error. Heic autem quia ſuppoſitio Longitudinis Cometae pro 2 Aug. $3^s. 5°. 59'$, melius quam iſta $3^s. 6°. 5'. 30''$ conducit, ad errorem pro 12 Aug. commiſſum deprimendum, vnice iam prioris hypotheſeos vſum faciendum decreui; concluſiones vero ex calculis deductae ſe habent, vti ſequens Schema declarat:

Semipar. 1, 2882495	Semipar. 1, 2589255
Temp. Perih. 19, 2717. Aug.	Temp. Perih. = 15, 7640. Aug.
Elong. Perih. a ☋ = 49°. 11'. 15''.	Elong. Perih. a ☋ = 47°. 0'. 52''.
Long. Com. 2 Aug. = 3^s. 5°. 59'. 7''.	Long. Com. 2 Aug. = 3^s. 5°. 59'. 12''.
12 Aug. = 3. 10. 56. 47.	12 Aug. = 3. 10. 49. 56.
29 Aug. = 3. 21. 0. 13.	29 Aug. = 3. 21. 16. 28.

Ex quo colligitur, ſi pro 29 Aug. Longitudo Cometae obſeruata aliquantum maior adoptetur, tamen errorem pro 12 Aug. commiſſum infra 15 Minuta prima deprimi non poſſe, contra vero ſi pro 29 Aug. Longitudo admitteretur aliquantum minor, tum obſeruationi die 12 Aug. factae errores omnino enormes induci. Sic ſi pro Semiparametro adhibeatur hic valor 1, 3106900, Elongatio autem Perihelii a ☋ ſtatuatur 50°. 56'. 10'' et tempus Perihelii 22, 2230 Aug.; fiet pro 2 Aug. Longit. Cometae = $3^s. 5°. 59'. 11''$, pro 12 Aug. = $3^s. 11°. 13'. 34''$ et pro 29 Aug. = $3^s. 20°. 56'. 54''$, vnde patet pro 12 Aug. iam emergere errorem plane enormem 39 Minut. primorum. Hoc igitur ſpecimine conſtat obſeruationem die 1 Octobr. factam non ab omni errore abſolui poſſe, multo minus eius errorem negatiuum ſtatui debere, quatenus

tenus in eo eſt elaborandum, vt error pro 12 Aug. commiſſus deprimatur.

§. 20. Etiamſi quisque facile concedet ſummum errorem, quem obſeruatione die 1 Octob. facta ſuſpicari liceret, quindecim minuta prima excedere non poſſe; interim tamen ſi quisquam ſibi perſuaderet hunc errorem poſitiuum augendo obſeruationes die 12 Aug. factas ad conſenſum cum reliquis redigi poſſe, nihilominus contendere licet, quod ſi vel maxime error priori obſeruationi tribuatur 27 Minut. primor. tamen obſeruationem die 12 Aug. inſtitutam vix ab errore 8 vel 7 Minut. primor. reddi poſſe immunem, vti ex calculis noſtris §. 6. recenſitis conſtat; Elementa enim Cometae ibi allata, ita obſeruationibus dier. 2 et 29 Aug. ſatisfaciunt, vt error in obſeruatione 1 Octobris adſit 27′. 23″, tum vero in obſeruatione die 12 Aug. facta, remanebit error 9′. Ideoque audacter contendere licet, quod etiamſi obſeruationi diei 1 Octob. tribuatur error poſitiuus 30 adeo Minut. primor. et in obſeruationibus 2 et 29 Aug. errores admittantur a veriſimilitudine non alieni; tum nihilominus in obſeruatione die 12 Aug. facta errorem ſaltem 6 Minut. primorum ineſſe debere, quem vix admitti poſſe exiſtimo. Caeterum qui vllam obſeruationum Aſtronomicarum habuerint ideam, facile diiudicare poterunt, an fieri queat, vt in Longitudine Cometae determinanda error committatur 30 Min. primorum; vt enim obſeruator huiusmodi errorem committere potuerit, neceſſum eſt vt ſibi imaginatus ſit tranſitum Cometae per filum horarium eo momento factum eſſe, quo Cometa ipſum campum Tubi nondum intrauit; quippe quum tubi, quos ad has ob-

obſeruationes adhibere ſolent Aſtronomi, ſi ſex vel ſeptem pedes excedant, vix campum in coelo vno gradu maiorem excipere ſoleant.

§. 21. At vero ſi excipiatur obſeruationi quidem 1 Octob. factae, tantum errorem eo minus tribui poſſe, quod tum quoque eiusdem nominis et eiusdem magnitudinis error obſeruationibus diebus 29 Septembris et 20 Octobris ineſſe deberet, nec tamen conſtare cur non obſervatio die 12 Aug. 12 Minut. primis erronea eſſe poſſit; ad huiusmodi exceptionem facilis eſt reſponſio. Primum enim huiusmodi error pro iſto die locum vix habere potuit, quia quatuor illae obſeruationes, quas Cel. *Meſſier* iſto die inſtituit, egregrie inter ſe conſentiunt. Deinde ſi pro die commemorato tantus admitteretur error, neceſſum eſſet vt obſeruationibus diebus 10, 11 14 et 15 Aug. factis, aequales fere, ſaltem non multo minores errores tribuerentur; iam vero vnusquisque diiudicare poterit, vtrum hoc probabile ſit, vt exercitatiſſimus obſeruator in obſeruationibus numero plus quam viginti inſtitutis errores commiſerit 10 Minut. primor. ſingulos eiusdem nominis.

§. 22. Ex his igitur quae iam *demonſtrata* ſunt, iſta conſequentia deducitur: tempus Periodicum Cometae Anno 1770 obſeruati, certe decem annis exſuperari, ideoque iſtud argumentum, quod ex breuitate temporis Periodici petitur, ad infringendam fidem obſeruationum plane corruere. Quod enim ſi hoc argumentum rite ſibi conſtaret pro tempore Periodico a nobis propoſito, neſcio cur non aeque ſtringens cenſeri deberet pro tempore periodico decem annorum. Iam autem euidentia Geometrica a nobis demon-

demonſtratum eſt, non fieri poſſe, vt obſeruationibus tales inſint errores, qualium inculpari deberent, ſi tempus Periodicum ponatur decem annorum; vnde colligimus hoc tempus Periodicum reapſe decem annis fuiſſe minus. Quare ſi concedatur, quod omnino concedendum eſſe exiſtimo, Cometae tempus Periodicum infra decem annos deprimi, nullam perſpicere licet rationem, quae quemquam inducere poſſit, vt credat tempus Periodicum a me propoſitum, ob breuitatem, pro abſurdo eſſe habendum.

§. 23. Si cuiquam videatur, me maiori molimine, quam omnino opus erat, fidem obſeruationum a Cel. *Meſſier* circa hunc Cometam inſtitutarum, adſtruere voluiſſe, quippe quum facile fieri queat, vt plurima pars Aſtronomorum in huius disquiſitionis exactitudinem, examine inſtituto inquirere operae pretium non ducat; qui in huiusmodi fuerit opinione, ſcire debebit, mihi plane perinde eſſe, ſi quae heic propoſita ſunt a pluribus vel paucis legantur; ſufficit enim mihi, quod exacta demonſtratione id confirmare licuerit, quod animo mihi propoſitum erat, nimirum vt oſtenderem, Celeb. Aſtronomum, qui de obſeruationibus Cel. *Meſſier* dubium iſtud protulit, non niſi valde friuolas iſtius dubii habere potuiſſe rationes, ipſumque ſane non bene perpendiſſe quid dixerat, dum iſtas obſeruationes in dubium eſſe vocandas affirmavit. Caeterum Celeb. iſte Aſtronomus in mentem ſibi reuocare debuiſſet, quod huiusmodi propoſito dubio, grauem non potuit non mihi facere iniuriam. Nam etiamſi mea opera in eo tantum verſabatur, vt quid ex obſeruationibus Cel. *Meſſier* ſequeretur, calculo eruerem; tamen neſcio an non ſummae oſcitantiae inculpandus fuiſſem, ſi

 poſt

poſt tam indefeſſum laborem, quem in hunc Cometam Anno 1770 obſeruatum, impendi, animaduertere non potuiſſem, de ipſis obſeruationibus aliquod ſuboriri debere dubium. Vtcunque autem parum veriſimile tempus iſtud Periodicum a me propoſitum videri poterit, tamen aequum omnino erit, vt rationes pro iſto ſtabiliendo a me propoſitae examinentur, quale examen qui ſuſceperit vix quidem de obſeruationum fide dubitare oportebit; qui vero tantum temporis ſibi ſumere non velit, vt hoc examen inſtituat, illum quoque a iudicio nimis praecipitanter propoſito, abſtinere oportet.

§. 24. Poſtquam haec iam litteris conſignata erant, ne quid in noſtra disquiſitione temere prolatum eſſe videretur, examinandum conſtitui, quinam error pro obſeruatione ad diem 12 Aug. prodiret, ſi ſupponatur Longitudinem Cometae pro 1 Octob. obſeruata 30 Minut. primis eſſe minorem, obſeruationem autem die 2 Aug. factam, ſatis bone ſe habere. Adhibito igitur valore Semiparametri = 1, 2589255, fiet pro conditionibus praeſcriptis, Elongatio Perihelii a Nodo deſcendente = 46°. 5′. 44″ et Tempus Perihelii 15, 1587 Aug. tumque Longitudines Cometae erunt:

			Differ. ab obſeruata
pro	2 Aug.	= 3^s. 6°. 2′. 20″	− 12″
	12 − −	= 3. 10. 42. 54	+ 8′. 6″
	29 − −	= 3. 20. 59. 49	− 14

haeque concluſiones cum ſupra §. 6. inuentis, bene conſentiunt.

§. 25.

§. 25. Vlterius pro valore ſemiparametri $= 1,2445146$, habetur Tempus Perihelii 13, 6080 Aug. et elongatio Periheli a Nodo $= 45°. 5'. 6''$. eruntque Longitudines Cometae:

pro 2 Aug.	3^s.	$6°$.	$2'$.	$31''$
12 —	3.	10.	43.	34
29 —	3.	21.	9.	11

vnde iam colligitur minimam fere aberrationem, quae pro obſeruatione diei 12 Aug. ſub hypotheſi praeſcripta, locum habere poteſt, iſti valori ſemiparametri $= 1,2589255$ reſpondere; nam ex praecedentibus noſtris calculis patet, ſi valor ſemiparametri aliquantum augeretur, etiam aberrationem obſeruationis die 12 Aug. factae aliquantum increſcere. Nec quidem ſi aberrationes maioris momenti pro obſeruatione die 29 Aug. inſtituta euitare velimus, valorem ſemiparametri ab iſto 1, 2589255 multum diuerſum, adoptare licebit. Quum vero ex praecedentibus calculis §. 17. allatis pateſcat, mutationem 6 Minut. primor. pro Longitudine ad diem 2 Aug., non niſi ſemiſſem huius quantitatis pro obſeruatione die 12 Aug. inuoluere, colligitur aberrationem vltimae huius obſeruationis vix infra 6 Minuta prima deprimi poſſe; quae nimirum locum haberet, ſi ſupponatur obſeruationi die 2 Aug. factae ineſſe aberrationem 4 Minut. primorum. Sicque plene euictum eſt, iſtum errorem 30 Minut. primorum pro loco Cometae die 1 Octob. obſeruato, nondum valere ad ſuppeditandum errorem veriſimilem pro locis Cometae menſe Auguſti obſeruatis. Si autem quis operam dare vellet, vt orbitam Cometae erueret, quae locis eius menſe Auguſti obſeruatis, ſatisfaceret; tum ſane id praeſtare non

poterit, niſi errorem admittendo pro loco Cometae die 1 Octob. obſeruato, qui ab integro gradu vix differet.

§. 26. Caeterum vel me non monente intelligitur, etiamſi tempus Periodicum decem annorum, pro obſeruationibus aberrationes a veriſimilitudine non prorſus alienas ſuppeditare cenſeretur; tamen hoc tempus Periodicum aliquantum augendo, prouti ſi ſtatuatur quindecim annorum, aberrationes obſeruationum omnino abſurdas eſſe prodituras, vnde omnino liquet breuitatem temporis Periodici, non adſtrui poſſe tamquam rationem ſatis tutam, ex qua dubium contra obſeruationum exactitudinem deduci debeat. Quod ſi vero quis ſibi perſuadeat, obſeruationibus commemoratis errores dimidii gradus ineſſe poſſe, illi quoque fatendum eſt, quae hucusque de Elementis Cometarum cognita ſunt, pro valde dubiis eſſe habenda, quum vix quisquam demonſtrare poterit obſeruationes erroribus maxime inſignibus non fuiſſe obnoxias. Plura quidem addere poſſem argumenta, quibus ſaltem probabile reddi poſſet, tempus Periodicum decem annorum cum locis Cometae anno 1770 obſeruatis nullo modo conſiſtere poſſe; verum cui demonſtratio modo allata non ſatisfacere poterit, ille nec reliquas rationes ſatis ſtringentes inueniet, quare aequum eſt, vt vnicuique liberum relinquatur, quid hac de re ſtatuere velit.

ANI-

ANIMADVERSIO IN LONGITVDINES VRBIVM NESCHIN, LVBNY et KIOWIAE.

Auctore

S. RUMORSKY.

In definiendis Longitudinibus vrbium Neſchin et Lubny Vir Celeber. *Inochodzoff* ob defectum obſeruationum correſpondentium coactus fuit obſeruationes ſuas ſuper ſatellitis Iouis habilas comparare cum momentis ex Ephemeridibus depromtis; cum vero in Calendario Aſtronomico Berolinenſi ad annum 1786 obſeruationibus in Neſchin et Lubny inſtitutis compareant correſpondentes Maſſiliae et Budae habitae, e re eſſe iudicaui pro vſu Geographico determinationes a Viro Celeber. in Actis Academiae pro anno 1779 et 1780 partibus poſterioribus prolatas per comparationem correſpondentium comprobare.

Budae obſeruationes vt plurimum a duobus Aſtronomis *Franciſco Weiſs* et a *Bruna* inſtitutae ſunt; Immerſiones ab vtroque eodem fere temporis momento, Emerſiones vero vt plurimum citius a *Franciſco Weiſs* obſeruatae ſunt, quamobrem momenta illius praeferenda eſſe exiſtimaui.

Die $\frac{11}{23}$ Febr. Imm. I. Sat.	17^h.	$35'$.	$50''$.	Neſchin.
	16.	44.	31.	Buda.
Differ. merid.	0.	51.	19.	
Die $\frac{27\ Febr.}{10\ Mart.}$ Imm. I. Sat.	15.	53.	54.	Neſchin.
	15.	2.	39.	Buda.
Differ. merid.	0.	51.	15.	
Die $\frac{11}{23}$ Febr. Imm. II. Sat.	14.	59.	0.	Neſchin.
	14.	7.	59.	Bud.
Diff. merid.	0.	51.	1.	

Sumendo medium differentia meridianorum Neſchin et Budam inter prodit $0^h. 51'. 12''$; adhibilis vero momentis a Dno. *Bruna* obſeruatis prodiret $0^h. 51'. 17''$.

Longitudo Budae a Maſſilia ex obſeruationibus eodem Calendario inſertis ſequentem in modum adſtrui poterit:

Die $\frac{7}{18}$ Maii Imm. I. Sat.	15^h.	$43'$.	$51''$.	Bud. dub.
	14.	48.	12.	Maſſ.
Differ. merid.	0.	55.	39.	
— $\frac{8}{19}$ Iun. Em. I. Sat.	14.	24.	19.	Bud.
	13.	29.	46.	Maſſ.
Diff. merid.	0.	54.	33.	

Die

Die $\frac{2}{13}$ Iulii Em. II. Sat.	$10^{h}.\ 12.'\ 15''.$	Bud. *Br.*
	9. 17. 28.	Maſſ.
Differ. merid.	0. 54. 47.	
— $\frac{9}{20}$ Iulii Em. III. Sat.	10. 21. 51.	Bud.
	9. 27. 13.	Maſſ.
Differ. merid.	0. 54. 38.	
- - - Em. II. Sat.	12. 46. 41.	Bud.
	11. 51. 59.	Maſſ.
Differ. merid.	0. 54. 42.	
— $\frac{11}{22}$ Iulii Em. I. Sat.	10. 55. 35.	Bud.
	10. 1. 11.	Maſſ.
Differ. merid.	0. 54. 24.	
— $\frac{16}{27}$ Iulii Imm. III. Sat.	11. 35. 18.	Bud.
	10. 40. 36.	Maſſ.
Differ. merid.	0. 54. 42.	
— $\frac{25\ \text{Iulii}}{5\ \text{Aug.}}$ Em. I. Sat.	9. 15. 13.	Bud.
	8. 21. 20.	Maſſ.
Differ. merid.	0. 53. 53.	
— $\frac{3}{14}$ Aug. Em. II. Sat.	9. 49. 55.	Bud.
	8. 55. 39.	Maſſ.
Differ. merid.	0. 54. 16.	
— $\frac{3}{14}$ Sept. Em. I. Sat.	8. 1. 21.	Bud. *Brun.*
	7. 6. 48.	
Differ. merid.	0. 54. 43.	

Miſſa iam prima determinatione nouem reliquarum media Longitudo Budae a Maſſilia prodit 54′. 37″ verſus orientem, et a Lutetia Pariſiorum 1^h. 6′. 46″. Maſſiliae etenim Longitudo a Lutetia Pariſiorum eſt 12′. 9″. Hinc Longitudo vrbis Neschin a meridiano Pariſino numerata habebitur 1^h. 57′. 58″, dimidio ſcilicet minuto primo maior illa, quam Vir Cel. *Inochodzoff* ex comparatione obſeruationum ſuarum cum momentis ex Ephemeridibus depromtis deduxerat.

Similem in modum ex obſeruationibus in vrbe Lubny et Budae habitis differentia meridianorum eruitur.

Anno 1782.

Die $\frac{6}{17}$ Maii Imm. II. Sat.	12^h.	4′.	48″.	Lubny dub.
	11.	9.	55.	Bud.
Diff. merid.	0.	54.	53.	
— $\frac{1}{12}$ Iun. Imm. I. Sat.	11.	14.	0.	Lubny.
	10.	18.	22.	Bud.
Differ. merid.	0.	55.	38.	
— $\frac{17}{28}$ Iun. Em. I. Sat.	11.	42.	6.	Lubny.
	10.	45.	30.	Bud.
Differ. merid.	0.	56.	36.	
— $\frac{3}{14}$ Iulii Em. I. Sat.	9.	57.	17.	Lubny.
	9.	1.	3.	Bud.
Differ. merid.	0.	56.	14.	
— $\frac{9}{20}$ Iul. Em. III. Sat.	11.	18.	24.	Lubny.
	10.	21.	51.	Bud.
Diff. merid.	0.	56.	33.	

Die

Die $\frac{10}{21}$ Iulii Em. I. Sat.	$11^h. 51'. 49''$.	Lubny.
	10. 55. 35.	Bud.
Differ. merid.	0. 56. 14.	

Neglecta prima determinatione differentia meridianorum media ex quinque reliquis habebitur $0^h. 56'. 16''$ quam prope ad veram accedere ideo exiſtimo, quod Emerſio die 10 Iulii vtrinque exacte fuerit obſeruata, reliqua vero momenta modo ob proximitatem ſatellitis Ioui, modo ob ſplendorem Lunae non aeque exacta ab obſeruatoribus praedicentur. Longitudo igitur Lubny a meridiano Pariſino numerata habebitur $2^h. 3'. 2''$.

Longitudinem hanc comprobare videtur Emerſio die 10 Iulii *Maſſiliae* obſeruata $10^h. 1'. 11''$. quae collata cum obſeruatione in vrbe Lubny habita dat Longitudinem eius a *Maſſilia* $1^h. 50'. 38''$, et a Lutetia Pariſiorum $2^h. 2'. 47''$. Quam ob rem differentia meridianorum Pariſienſis et Lubnenſis ſtatui poterit $2^h. 2'. 54''$ quam proxime, integro fere minuto primo maior illa, quam Cel. *Inochodzoff* ſuppoſuerat.

Determinationes iſtas comprobat etiam Mappa Gubernii Kiouienſis ex menſuris Geodaeticis nuperrime conſtructa. Aſſumta enim Latitudine Neschin $51°. 2'. 45''$ et Longitudine $1^h. 57'. 58''$ ſiue in gradibus $29°. 29'. 30''$, Latitudine Lubny $50°. 0'. 40''$, Longitudine $2^h. 2'. 54''$ ſiue in gradibus $30°. 43'. 30''$ arcus circuli maximi inter memorata loca interceptus prodit $1°. 17'. 54''$, qui in Werſtas conuerſus dat $135\frac{1}{2}$, id quod egregie conſentit cum Mappa ſu-

ſupra memorata: via etenim breuiſſima Neschin inter et Lubny iuxta illam reperitur $133\frac{1}{2}$ Werſtarum.

In eadem Mappa occurrit vrbs Krementschuk, cuius Latitudine poſita $49°. 3'. 28''$, et Longitudine a meridiano Pariſino $2^h. 4'. 35''$, (Nou. Comm. Tom. XX.) reperitur arcus circuli maximi inter Krementschuk et Lubny interceptus $59'. 45''$ ſiue in Werſtis 104, et arcus circuli maximi a Krementschuk ad Neschin ductus $2°. 15'. 12''$ ſiue in Werſtis $235\frac{1}{2}$, et cum iuxta eandem Mappam via breuiſſima inter Krementschuk et Lubny ſit $112\frac{1}{2}$ Werſtarum, inter Krementschuk et Neschin 243 Werſtarum, patet Mappam vltra, quam ſperare fas eſt, concordare cum obſeruationibus.

Perſpecta iam exactitudine Mappae Gubernii Kiouienſis menſuris vnice Geodaeticis innixae experiri volui, quanta iuxta illam proditura ſit Longitudo Kiouiae; obſeruationes etenim ibi habitae tam diuerſas pro Longitudine illius praebent determinationes, vt medium ex iis ſumere ſit nefas, (Nou. Comm. Tom. XV. et Actor. Acad. ad Ann. 1777. pars II.), et vtra reliquis ſit praeferenda cum certitudine aſſerere non licet; nam omnes, excepta illa, quam praebet Immerſio I. Sat Anno 1773. die 19. Iulii obſeruata, ſc. $1^h. 55'. 8''$, ex comparatione obſeruationum cum Tabulis profluxere. Poſita igitur Latitudine Kiouiae $50°. 26'. 10''$, vrbium vero Neschin, Lubny et Krementschuk poſitionibus manentibus, quales ſupra relatae ſunt, quoniam via breuiſſima Kiouiam inter et Neschin iuxta Mappam eſt 120 Werſtarum, Kiouiam inter et Lubny 178 et Kiouiam inter et Krementschuk 250 Werſta-

ſtarum, Longitudo Kiouiae a Neſchin reperitur $6'.\ 9''$. a Lubny $10'.\ 6''$, a Krementſchuk $12'.\ 6''$, et Longitudo a meridiano Pariſino computata $1^h.\ 51'.\ 49''$; $1^h.\ 52'.\ 48''$; $1^h.\ 52'.\ 30''$ non parum diuerſa ab illa, quae reſultat ex comparatione Immerſionum in vrbibus Kiouia et Dmitrewsk die $\frac{19}{30}$ Iulii obſeruatarum ſc. $1^h.\ 55'.\ 3''$.

Quodſi Longitudo Kiouiae a Lutetia Pariſiorum ponatur $1^h.\ 55'$. et vice verſa computentur minimae illius diſtantiae ab vrbibus ſupra memoratis, prodibit via breuiſſima a Kiouia ad Neſchin 50, ad Lubny 140 et ad Krementſchuk 216 Werſtarum. Statuendum igitur foret in aeſtimatione diſtantiarum Kiouiae a Neſchin 70, a Lubny 38 et a Krementſchuk 35 Werſtarum errores ad minimum eſſe commiſſos. Aſt minus probabile videtur, vt in tam exiguis diſtantiis menſurandis tam enormes errores et quidem in defectu committi potuerint, praeſertim cum in Mappa ſaepius dicta reſpectiua vrbium Neſchin, Lubny et Krementſchuk poſitio optime conſentiat cum illa, quam obſeruationes poſt modum ibi habitae praebuere: Quam ob rem in eam inducor ſententiam, vt credam Longitudinem vrbis Kiouiae a meridiano Pariſino non maiorem $1^h.\ 52'.\ 30''$ ſtatui debere.

COMPARATIO OBSERVATIONIS ECLIPSIS LVNAE ANNO 1783 DIE $\frac{7}{18}$ MARTII IN VRBE CHARKOW HABITAE CVM OBSERVATIONE PETROPOLI ET PARISIIS INSTITVTA.

Auctore

STEPHANO RUMOVSKI.

Comparatio obſeruationis huius Eclipſeos in Vrbe Charkow a Cel. *Inochodzoff* habitae cum obſeruatione Petropoli a Cel. *Lexell* inſtituta legitur in parte I. Actorum Academiae Scientiarum pro Anno 1781 editorum; eadem Eclipſis obſeruata eſt a me et Pariſiis a Cel. *Mechain* in Muſeo Regio, id circo non inutile exiſtimaui determinationem Longitudinis vrbis Charkow a Cel. *Lexell* pro latam per mutuam comparationem obſeruationis Pariſinae et meae cum obſeruatione Charkovienſi comprobare.

Initium Eclipſeos in Charkow	$9^h. 57'. 0''.$	Diff. merid.	
Petropoli	9. 33. 17.	$23'. 43''.$	

Gri-

Grimaldus immergit in Charkow	9^h.	$59'$.	$20''$.	Diff. merid.
Petropoli	9.	36.	32.	$22'$. $48''$.
Bullialdus immergit in Charkow	10.	15.	59.	
Petropoli	9.	52.	25.	23. 34.
Vmbra ad Copernicum, Charkow	10.	17.	13.	
Petropoli	9.	53.	47.	23. 26.
Copernicus immerpit Charkow	10.	19.	35.	
Petropoli	9.	55.	55.	23. 40.
Vmbra ad Tychonem Charkow	10.	23.	34.	
Petropoli	9.	59.	45.	23. 40.
Tycho immergit Charkow -	10.	25.	39.	
Petropoli -	10.	1.	25.	24. 14.
Vmbra ad Platonem Charkow	10.	28.	53.	
Petropoli	10.	5.	55.	22. 58.
Plato immergit Charkow -	10.	30.	12.	
Petropoli -	10.	6.	55.	23. 17.
Menelaus immergit Charkow	10.	37.	18.	
Petropoli	10.	10.	19.	26. 59.
Vmbra ad mare Criſium Charkow	10.	51.	7.	
Petropoli	10.	26.	54.	24. 3.
Mare Criſium immergit Charkow	20.	54.	22.	
Petropoli	10.	31.	32.	22. 50.
Eclipſis totalis Charkow -	10.	57.	17.	
Petropoli -	10.	32.	52.	24. 25.

Initium Emerſ. Charkow -	$12^h. 39'. 26''.$	Diff. merid.
Petropoli -	12. 13. 34.	$25'. 52''.$
Grimaldus emergit Charkow	12. 42. 8.	
Petropoli	12. 17 44.	24. 44.
Galilaeus emergit Charkow	12. 46. 38.	
Petropoli	12. 22. 54.	23. 44.
Ariſtarchus emergit Charkow	12. 50. 57.	
Petropoli	12. 50. 57.	22. 33.

Neglecta igitur obſeruatione *Manilii* media differentia meridianorum inter Charkow et Petropolin habetur $33'. 43''.$ ac Longitudo vrbis Charkow a meridiano Pariſino numerata $2^h. 15'. 40''.$ paucis ſecundis differens ab ea, quam Cel. *Lexell* ex comparatione obſeruationis ſuae cum obſeruatione Charkowienſi elicuerat.

Quoniam Muſeum Regium, vbi Cel. *Mechain* obſeruauit Eclipſin Lunae, occidentalius eſt Obſeruatorio Regio Pariſino $14''$, praecipua momenta ad meridianum obſeruatorii reducta collata cum momentis in Charkow obſeruatis ſequentes largientur determinationes

Initium Eclipſeos Chark.	$9^h. 57'. 0''.$
Pariſiis - -	7. 41. 29.
Diff. merid.	2. 15. 31.
Eclipſis totalis in Chark.	10. 57. 17.
Pariſiis - -	8. 41. 22.
Diff. merid.	2. 15. 55.

Initi-

Initium Emerſ. in Chark.	$12^h. 39'. 26''.$		$12^h. 39'. 26''.$
aeſtimatum Pariſiis	10. 21. 57,	certum	10. 22. 48.
Diff. merid.	2. 17. 29.		2. 16. 38.
Finis Eclipſeos in Chark.	13. 39. 51.		13. 39. 26.
aeſtimatus Pariſiis	11. 22. 44.	certus	11. 24. 24.
Diff. merid.	2. 17. 7.		2. 15. 2.

Omiſſis igitur determinationibus, quae momentis aeſtimatis innituntur, Longitudo vrbis Charkow a meridiano Pariſino computata habebitur $2^h. 15'. 49''.$

Eadem Eclipſis obſeruata eſt Toloſati aliisque in locis, facile igitur Charkowienſis cum iis comparari poterit; Aſt cum Longitudo vrbis Charkow pro vſu ſaltem geographico exacte iam definita eſſe videatur, labori huic ſuperſedendum eſſe exiſtimo.

SVM-

SVMMARIVM OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM PRO DEFINIENDO SITV GEOGRAPHICO VRBIS KVRSK ANNO 1783 HABITARVM.

Auctore

PETRO INOCHODZOW.

Ex altitudinibus ſtellarum fixarum meridianis, verſus Boream et Auſtrum captis inquiſiui in errorem quadrantis et ſimul in latitudinem loci, eodem modo, vt dictum eſt de obſeruationibus Cherſonenſibus.

	Error. Quadr.	Latitudo.
Die $\frac{4}{15}$ Iun. Ex β vrſae minoris et α ſerpentis	$-4' \, 45\frac{1}{2}''$.	51°. 43′. 25″
γ - - -	4. 50.	- - 29
— $\frac{7}{18}$ Iun. ex β vrſae min. et Arcturo	4 40.	- - 22
ζ Bootis	4. $33\frac{1}{2}$.	- - $28\frac{1}{2}$
ε Bootis	4. 36.	- - 25

$\frac{8}{19}$ Iun.

	Error. Quadr.	Latitudo.
Die $\frac{8}{19}$ Iun. ex β vrſae min. et Arcturo	−4′. 44″.	51°. 43′. 20″.
ε Bootis	4. 41.	23.
— $\frac{10}{21}$ Iun. ex β vrſae min. et Arcturo	4. 37½.	22½.
ε Boot.	4. 39.	21.
— $\frac{15}{26}$ Iun. ex β vrſae min. et δ Boot.	4. 34.	30.
γ - - - -	4. 35½.	31½.
— $\frac{11}{22}$ Iulii ex δ Draconis et β Lyrae	4. 50.	34.
et θ Hercul.	4. 47½.	36½.
— $\frac{17}{28}$ Iul. ex δ Dracon. et β Lyrae	4. 48.	32½.
γ - -	4. 40.	41.
— $\frac{18}{29}$ Iul. ex δ Dracon. et β Lyrae	4. 45.	35.
δ - -	4. 51.	29.
γ - -	4. 42.	39.
— $\frac{25 \text{ Iul.}}{5 \text{ Aug.}}$ ex δ Dracon. et β Lyrae	4. 42.	39.
δ - -	4. 47½.	33½.
γ - -	4. 43.	38.
Medium ex omnibus -	4. 42½.	51°. 43′. 30″.

Sequuntur iam ipſae obſeruationes ſtellarum fixarum.

Dies obſ. St. nou.	Nomina fixarum.	alt. obſeru.	Error. Quadr.	refract. d. la Caill.	Decl. appar. ad d. obſeru.	Eleuatio Poli.
15 Iun.	β Vrſ. min.	66°. 45′. 40″	−4′. 42½″	0′. 28½″	75°. 2′. 59″	51°. 43′. 28″
	γ - - -	69. 12. 5		25	72. 36. 39	37½
	α Serpent.	45. 29. 47		1. 5	7. 7. 21½	22½
18 Iun.	Arcturus	58. 41. 13		0. 40½	20. 19. 14	24
	ζ Bootis	53. 2. 4		50	14. 40. 9	37½
	ε Bootis	66. 21. 44		29½	28. 0. 3	31
	β Vrſ. min.	66. 45. 30		28½	75. 3. 0	19

Dies obſ. St. nou.	Nomina fixarum.	Alt. obſeru.	Error. Quadr.	refract. d.l.Caill.	Decl.appar. ad d.obſeru.	Eleuatio Poli.
19 Iun.	Arcturus	58°.41'.19"	−4'.42½'''	0'.40½'''	20°.19'.14"	51°.43'.18"
	ε Bootis	66. 21. 50		29½	18. 0. 3	25
	β Vrſ. min.	66. 45. 32		28½	75. 3. 0	21
21 Iun.	Arcturus	58. 41. 10		0. 40½	20. 19. 14½	27½
	ε Bootis	66. 21. 51		29½	28. 0. 3½	24½
	β Vrſ. min.	66. 45. 28		28½	75. 3. 0½	18
26 Iun.	β Vrſ. min.	66. 45. 32		28½	75. 3. 1	22
	δ Bootis	72. 29. 41		21	34. 8. 19	38½
	γ Vrſ. min.	69. 11. 50		25	72. 36. 42	24½
18 Iul.	β Ophiunch.	43. 2. 52		1. 11	4. 40. 26	27½
	γ - -	41. 11. 8		1. 16	2. 48. 37	27½
	θ Hercul.	75. 39. 11		0. 17½	37. 17. 42½	31
22 Iul.	β Lyrae	71. 29. 25		0. 22½	33. 7. 46½	26½
	δ Dracon.	74. 31. 35		18½	67. 17. 7	41
28 Iul.	β Lyrae	71. 29. 26		0. 22½	33. 7. 48	27
	γ - -	70 46. 0		23	32. 24. 38	43½
	δ Dracon.	74. 31. 30		18½	67. 17. 9	38
29 Iul.	β Lyrae	71. 29. 20		22½	33. 7. 48	33
	δ - -	75. 0. 7		18	36. 38. 26	19½
	γ - -	70. 46. 4		23	32. 24. 38	39½
	δ Dracon.	74. 31. 30		18½	67. 17. 9	38
5 Aug.	β Lyrae	71. 29. 15		22½	33. 7. 50	40
	δ - -	75. 0. 0		18	36. 38. 28	28½
	γ - -	70. 46. 8		23	32. 24. 40	37½
	δ Dracon.	74. 31. 28		18½	67. 17. 11	38

Medium - - 51. 43. 30

Alti-

Altitudines Solis meridianae.

In computanda declinatione Solis ſuppoſita eſt differentia meridianorum inter Pariſios et Kursk 2, 3 Hor.

Dies obſ. St. nov.	Altitudo obſeruat. ⊙	Error. Quadr.	Refr. − par.	½ Diam. ⊙	Declinat. ⊙	Latitudo.
17 Iun.	62°. 1'.56''	−4'.42½''	0'.31''	15'.47''	23°.43'.15''	51°.21'.19½''
18	62. 3.26		— —	— —	23. 25. 47	21½
19	62. 4.28		— —	— —	23. 26. 56	28½
21	62. 5.28		— —	— —	23. 27. 56½	29
23	62. 4.44		— —	— —	23. 27. 18	34½
25	62. 2.34		— —	15. 46½	23. 25. 1	27
26	62. 0.45		— —	— —	23. 23. 15	30
28	61. 56. 8		— —	— —	23. 18. 30	22
30	61. 49. 47		— —	— —	23. 12. 7	20
1 Iul.	61. 45. 52		0. 31½	— —	23. 8. 18	26½
2	61. 41. 50		32	— —	23. 4. 5	16
11	60. 46. 1		33	15. 47	22. 8. 20	21½
12	60. 37. 55		— —	— —	22. 0. 11	18½
14	60. 20. 33		34	— —	21. 42. 47	17½
16	60. 1. 42		— —	— —	21. 23. 54	15½
21	59. 7. 51		35	— —	20. 30. 22	35½
22	58. 56. 12		36	15. 47½	20. 18. 37	31
23	58. 44. 13		37	— —	20. 6. 31	25
28	57. 38. 34		38	15. 48	19. 1. 5	39½
29	57. 24. 33		38½	— —	18. 47. 2	38
31	56. 55. 40		— —	15. 48½	18. 18. 1½	31
3 Aug.	56. 10. 3		40	15. 49	17. 32. 14½	23
6	55. 21. 48		41	15. 49½	16. 43. 55	20
7	55. 4. 48		42	— —	16. 27. 15	41
					Med.	51. 43. 30½

Latitudo igitur vrbis Kursk tuto ſtatui poteſt 51°. 43½'.

Obſer-

Obſeruationes pro Longitudine eiusdem Vrbis.

$\frac{20}{31}$ Iul. Emerſio 4^{ti} ſatellitis $14^h. 24'. 14''$. T. v. Ioue in vaporibus horizontis verſante, hinc dubia.

$\frac{30 \text{ Iul.}}{10 \text{ Aug.}}$ Occultatio fixae ω in conſtellatione ſagittarii ad limbum Lunae obſcurum $10^h. 45'. 59''$ obſeru. bona.

Emerſio eiusdem ad lumbum lucidum - - $11. 30. 36$; ſtella iam erat parum remota, et veram emerſionem aliquot ſecundis citius contigiſſe arbitror.

$\frac{31 \text{ Iul.}}{11 \text{ Aug.}}$ Emerſio 1^{mi} ſatellitis $8^h. 0'. 51''$ coelo ſudo et pacato, faſciae ſatis diſcernebantur, obſeruatio bona.

— — Eodem Emerſio 3^{ii} ſatellitis $11^h. 37'. 19''$ ſub iisdem circumſtantiis, niſi lumen Lunae vicinae aliquantum obſtabat; in priori vero emerſione Luna erat adhuc prope horizontem.

$\frac{4}{15}$ Aug. Emerſio 2^{di} ſatellitis $13^h. 2'. 55''$ Ioue horizonti vicino et aere vaporoſo, hinc aliquantum dubia.

$\frac{6}{17}$ Aug. Emerſio 4^{ti} ſatellitis $8^h. 37'. 22''$ aere ſereno et quieto, faſciae mediocriter videbantur, Ioue tamen bene terminato.

Emerſio 1^{mi} ſatellitis collata cum momento ephemeridum dat differentiam meridianorum inter Pariſios et Kursk $2^h. 16'. 16''$.

Declinationem acus magneticae repetitis vicibus et duabus pyxidibus inueni 15° verſus occidentem. Quum haec declinatio a reliquis, quas hac in expeditione et antea ad Wolgam obſeruaui, diſcrepat, de vicinia minerae ferri ſuſpicari licet.

DE

DE
SITV GEOGRAPHICO
VRBIS WORONESCH,
DEDVCTO EX OBSERVATIONIBVS ASTRONOMICIS ANNO 1783 HABITIS.

Auctore
PETRO INOCHODZOW.

Quum primis ab aduentu meo in hanc vrbem diebus, vitrum in tubo Quadrantis oculare interius ex itinere excidiſſe animaduerterim; micrometrum erat eximendum, et vitro in priſtinum locum reſtituto, denuo inſerendum; hinc vt certus de ſtatu inſtrumenti redderer, verificationem ipſius per altitudines ſtellarum fixarum meridianas verſus Boream et Auſtrum diuerſis diebus captas inſtitui, atque errorem ſubtractiuum reperi:

Die $\frac{1}{12}$ Sept. Ex δ Draconis ad Bor. et α Lyrae ad Auſtr. 3′. 1″.

β	-	-	-	3. 9.
δ	-	-	-	3, 6½.
γ	-	-	-	3. 4½.

Die $\frac{6}{17}$ Sept.	Ex δ Dracon. et	β Cygni	$3'.4\frac{1}{2}''$.
		α Sagittae	3. $1\frac{1}{2}$.
		γ Aquilae	3. $2\frac{1}{2}$.
		θ Antinoi	3. $1\frac{1}{2}$.
Die $\frac{12}{23}$ Sept.	Ex δ Dracon. et	α Lyrae	3. 4.
		β	3. $4\frac{1}{2}$.
		δ	3. 4.
		γ	3. 0.
		β Cygni	3. 5.
		γ Aquilae	3. 2.
		α ——	3. 7.
Die $\frac{15}{26}$ Sept.	Ex δ Dracon. et	α Lyrae	3. 4.
		β	3. 0.
		δ	3. 1.
		γ	2. 59.
		β Cygni	2. 59.
Die $\frac{18}{29}$ Oct.	Ex β Cephei ad Bor. et	α Delphin. ad Auſtr.	2. $57\frac{1}{2}$
		ε Cygni	3. 0.
Die $\frac{21\ \text{Oct.}}{1\ \text{Nou.}}$.	Ex β Ceph. et	ε Pegaſi	3. $0\frac{1}{2}$.
		α Aquarii	2. $56\frac{1}{8}$
Vnde error medius			3. 2.

En ipſas obſeruationes:

Dies

Dies obſeruat.	Nomina fixarum.	Altitudo obſeruata.	Error Quadr.	Refr. de la Caill.	Declin. appar. ad diem obſeru.	Eleuatio Poli.
2/13 Sept.	α Lyrae	76°.58′.35″	−3′.2″	0′. 15″	38°.35′.54½″	51°.40′.36½″
	β - -	71. 31. 0		22½	33. 7. 56½	- - - 21
	δ - -	75. 1. 29		18	36. 38. 35	- - 26
	γ - -	70. 47. 42		23	32. 24. 47	- - 30
	δ Dracon.	74. 26. 35		18½	67. 17. 21	- - 35½
6/17 Sept.	δ Dracon.	74. 26. 37		0. 18½	67. 17. 22	- - 38½
	β Cygni	65. 54. 27		0. 30	27. 31. 28	- - 33
	α Sagittae	55. 55. 20		45	17. 32. 12	- - 39
	γ Aquilae	48. 29. 43		59	10. 6. 19	- - 37
	θ Antinoi	36. 57. 11		1. 28	1. 26. 39½	- - 39½
12/23 Sept.	α Lyrae	76. 58. 45		0. 15	38. 35. 55	- - 27
	β - -	71. 30. 56		22½	33. 7. 57	- - 25½
	δ - -	75. 1. 30		18	36. 38. 36	- - 26
	γ - -	70. 47. 39		23	32. 24. 48	- - 34
	δ Dracon.	74. 26. 28		18½	67. 17. 23	- - 30½
	β Cygni	65. 54. 35		30	67. 31. 38	- - 25
	γ Aquilae	48. 29. 50		59	10. 6. 19	- - 30
	α - -	46. 42. 34		1. 2	8. 18. 51	- - 21
13/24 Sept.	α Lyrae	76. 58. 50		0. 15	38. 35. 55	- - 22
	β - -	71. 30. 51		22½	33. 7. 57	- - 30½
	δ - -	75. 1. 27		18	36. 38. 36	- - 29
	γ - -	70. 47. 40		23	32. 24. 48	- - 33
	δ Dracon.	74. 26. 23		18½	67. 17. 24	- - 26½
	β Cygni	65. 54. 28		30	27. 31. 28	- - 32
18/29 Oct.	α Delphin	53. 33. 20		0. 49	15. 10. 2	- - 33
	ε Cygni	71. 33. 24		22	33. 10. 26	- - 28
	β Cephei	72. 6. 30		22	69. 37. 18	- - 24
21 Oct. / 1 Nov.	β Cephei	72. 6. 27		0. 22	69. 37. 18	- - 21
	ε Pegaſi	47. 17. 31		1. 1	8. 53. 52	- - 24
	α Aquarii	37. 2. 27		1. 28	1. 21. 31	- - 32

Medium 51. 40. 29, 6.

Videamus nunc altitudines Solis in meridiano verſantis, vbi notandum venit, pro computanda declinatione huius aſtri ſuppoſitam eſſe differentiam meridianorum inter Pariſios et Woronesch rotunde $\frac{1}{10}$ diei.

Dies obſeru. Stil. noui.	Altitud. limbi Solis ſuperior.	Error Quadrant.	Refract. — parall.	½ Diam. Solis.	Declinat. Solis Borealis.	Latitudo loci.
13. Sept.	42°.28'. 0"	— 3'. 2"	1'. 7"	15'.57"	3°.48'. 8"	51°.40'.14"
16.	41. 18. 39		9	58	2. 38. 47	- - 17
18.	40. 32. 10		11	58½	1. 52. 16	- - 17½
19.	40. 8. 35		12½	59	1. 28. 57	- - 35½
20.	39. 45. 10		13½	15. 59½	1. 5. 37	- - 42
22.	38. 58. 24		15½	16. 0	0. 18. 49½	- - 43
					Auſtralis.	
24.	38. 11. 44		18	0½	0. 28. 2	- - 34½
27.	37. 1. 40		21	1	1. 38. 20½	- - 23½
28.	36. 38. 10		22	1½	2. 1. 46½	- - 29
29.	36. 14. 47		23	2	2. 25. 10½	- - 29½
30.	35. 51. 16		25	2	2. 48. 34	- - 39½
2 Oct.	35. 4. 50		28	2½	3. 35. 15	- - 27½
4.	34. 18. 23		30	3	4. 21. 46½	- - 25½
6.	33. 32. 0		33	4	5. 8. 6	- - 33
8.	32. 46. 8		36½	4½	5. 54. 9	- - 26
9.	32. 23. 4		37½	4½	6. 17. 3½	- - 36½
11.	31. 37. 38		41	5	7. 2. 37½	- - 32½
13.	30. 52. 40		1. 43	6	7. 47. 49	- - 22
28.	25. 31. 23		2. 9	10	13. 9. 25	- - 33
29.	25. 11. 25		2. 11	16. 10	13. 29. 28	- - 30

Medium 51. 40. 29½.

Latitudo igitur Vrbis Woronesch tuto aſſumi poteſt 51°. 40½'.

Ob-

Obſeruationes pro longitudine.

$\frac{12}{23}$ Septembr. Immerſio 3^{ii} ſatellitis Iouis	$8^{h}. 33'. 58''$ t. v.
Obſeruatio haec ob nubes in regione Iouis vagantes dubia.	
$\frac{15}{26}$ Septembr. Emerſio 1^{mi} ſatellitis -	8. 56. 54.
Aëre aliquantum vaporoſo faſciae difficulter videbantur.	
$\frac{1}{12}$ Octobr. Emerſio 1^{mi} - - -	7. 21. 40.
Coelo ſereno faſciae bene diſcernebantur.	
$\frac{17}{28}$ Octobr. Emerſio 1^{mi} - - -	5. 44. 32.
Coelo ſereno faſciis ſatis conſpicuis.	
$\frac{18}{29}$ Octobr. Emerſio 3^{ii} - - -	8. 24. 33.
Emerſio haec conſecuta prope ſecundum ſatellitem, coelo ſereno, Ioue horizonti iam appropinquante.	
$\frac{24 \text{ Oct.}}{4 \text{ Nov.}}$ Emerſio 1^{mi} - - -	7. 40. 58.
Coelo ſereno faſciae mediocriter conſpiciebantur.	
$\frac{25 \text{ Oct.}}{5 \text{ Nov.}}$ Emerſio 2^{di} - - -	7. 22. 23.
Coelo nonnihil vaporoſo faſciae confuſe repreſentabantur.	
$\frac{29 \text{ Oct.}}{9 \text{ Nov.}}$ Occultatio Alcyones - -	11. 11. 34.
Coelo ſubnubilo et Luna halone circumdata, hinc dubia; Emerſionem ob nubes obſeruare non licuit.	

Quatuor Emerſiones 1^{mi} ſatellitis comparaui cum momentis ephemeridum:

Prior notata Pariſiis	$6^h.28'.49''$	praebet different.	$2^h.28'.5''$
Altera	- -	4. 54. 2	- - -	2. 27. 38
Tertia	- -	3. 17. 14	- - -	2. 27. 18
Quarta	- -	5. 13. 13	- - -	2. 27. 45
Differentia igitur meridianorum media			- -	2. 27. $41\frac{1}{4}$

Conuerſa in gradus dat $36°. 55\frac{1}{3}'$; vnde Longitudo loci a primo meridiano $56°. 55\frac{1}{3}'$.

His adnectitur obſeruatio Eclipſis Lunaris die $\frac{30 \text{ Aug.}}{10 \text{ Sept.}}$ facta.

Ingreſſum Lunae in vmbram terreſtrem ob nubes videre non potui; hora a media nocte $2\frac{1}{2}$ remotis nubibus ſequentes emerſiones obſeruaui:

Luna egredi incipit ex vmbra - -	15^h.	$3'$.	$14''$. t. v.
Grimaldus emerſit - - - -		5.	36.
Ariſtarchus - - - -		10.	45.
Keplerus - - - -		14.	9.
Copernicus - - - -		22.	32.
Plato - - - - -		25.	53.
Tycho - - - - -		27.	12.
Manilius - - - - -		35.	31.
Menelaus - - - -		38.	2.
Dioniſius - - - -		39.	57.
Poſſidonius - - - -		42.	5.
Promontorium Acutum - - - -		47.	46.
Proclus - - - -		50.	3.
Mare Criſium totum - - -		56.	53.
Finis Eclypſeos - - - -	16.	2.	18.
Penumbra euaneſcere videbatur - -	16.	7.	10.

Obſeruatio inſtituta tubo Dollondiano tripedali.

De-

Declinatio acus magneticae.

Die	23. Sept.	8°. occidentem verſus.
	28. —	8.
	30. —	8. et $8\frac{1}{4}$.
	18. Octob.	8. et $8\frac{1}{4}$.
	20. —	eadem.

EPITOME OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXXI. SECVNDVM CALENDARIVM GREGORIANVM INSTITVTARVM.

Auctore
IOANNE ALBERTO EVLER.

I. Barometrum.

1. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae, vna cum variatione maxima et ſtatu medio, pro ſingulis menſibus anni 1781.

Menſe	Altitudo maxima Dig. p. c.	die hora	Altitudo minima Dig. p. c.	die hora	Variatio p. c	Medium Dig. p. c.	Alt. med. Dig. p. c.
Ianuar.	28. 83	10. meridie.	27. 25	31. III. p. m.	158	28. 04	28. 07
Februar.	28. 87	21. XI a m	27. 30	14 III. p. m.	157	28. 08	28. 01
Mart.	28. 34	3. VI. p. m.	27 32	19. XI. p. m	102	27. 83	27 86
April.	28. 68	19. II. p. m.	27. 34	14. VI. a. m.	134	28. 01	28. 17
Maii	28. 57	1. VI a. m	27. 56	31. I. p. m	101	28. 07	28. 10
Iunii	28. 37	15. VI a. m.	27. 63	30. XII. p. m	74	28. 00	28. 00
Iulii	28. 42	8 IX. a. m.	27. 22	24. III. a. m.	120	27. 82	27. 91
Auguſti	28. 54	6. VI. a. m.	27. 59	24. VII a. m.	95	28. 06	28 11
Sept.	28. 43	30. meridie	27. 77	23. VI. p. m.	66	28. 10	28. 13
Octobr.	28. 42	14. IX. p. m.	27. 22	23. III. a. m.	120	27. 82	27. 87
Nouembr.	28. 73	27. XII. p. m.	27. 46	14. 17. III p. m.	127	28. 10	28 01
Decembr.	28. 83	21. IX a. m.	27. 43	29. X p. m.	140	28. 13	28 15
Anno 1781.	28. 87	Menſe Februarii.	27. 22	Menſibus Iulii et Octobr.	165	28. 04	28. 03

2. Nu-

2. Numerus dierum, quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem 28 poll.

Menſe	ſupra 28. 20 Dies, horae	28. 10 Dies, horae	28. 00 Dies, horae	27. 90 Dies, horae	27. 80 Dies, horae	per dimidium menſis ſupra Dig. p. c.
Ian.	12. 9	15. 6	17. 6	19. 12	21. 21	28. 09
Febr.	6. 9	9. 15	13. 21	16. 6	20. 12	27. 99
Mart.	2. 12	6. 12	10. 9	14. 15	18. 15	27. 88
April.	17. 0	19. 21	21. 6	22. 21	24. 12	28. 24
Maii	9. 18	17. 6	21. 6	24. 9	27. 12	28. 13
Iunii	4. 21	10. 15	14. 21	20. 9	25. 3	27. 99
Iulii	5 6	8. 3	10 3	15. 0	19. 3	27. 88
Aug.	10. 21	13. 6	18. 0	25. 12	30. 0	28. 02
Sept.	10. 18	14 21	19. 12	27. 12	29. 15	28. 09
Oct.	7. 0	10. 6	14. 15	18. 12	20. 21	27. 98
Nou.	7. 0	9. 0	13. 15	17. 21	22 15	27. 97
Dec.	15. 0	18. 6	22. 15	25. 9	28. 15	28. 18
Anno 1781.	108. 18	152. 21	197. 9	247 18	289. 0	28. 03

Notandum eſt, duas priores figuras altitudinum barometricarum pollices integros deſignare, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt a. m. ſignificare ante meridiem, p. m. verum poſt meridiem:

Colligitur ex his binis tabulis, pro toto anno

1. Altitudo maxima Barometri 28. 87: menſe Februarii die 21, hora antemeridiana XI^{ma}. Thermometrum 175. Coelum erat ſerenum. Ventus ex NO leniter ſpirabat

 2. Al-

2. Altitudo Barometri minima 27. 22: menſe Iulii, die 24, hora matutina III^a. Thermometrum 131. coelum obductum, pluuia copioſa, Eurus. Deinde eadem altitudo quoque obſeruata fuit menſe Octobris, die 23, hora matutina III^a. Thermometrum 147 Coelum obductum, nix et pluvia, Zephiro leniter flante.

3. Variatio maxima, 1 $\frac{65}{100}$ poll.

4. Medium inter maximam alitudinem et minimam 28. 04

5. Barometri altitudo inter omnes obſeruatas media, 28. 03 vel 28 $\frac{3}{100}$ poll.

6. Mercurius in tubo Barometri ſe ſuſtentabat ſupra

28, 20	per dies	108 $\frac{1}{4}$
28, 10	per dies	152 $\frac{1}{4}$
28, 00	per dies	197 $\frac{1}{4}$
27, 90	per dies	247 $\frac{1}{4}$
27, 80	per dies	289

vnde concludi poteſt, mercurium per interuallum dimidii anni vel 182 $\frac{1}{2}$ dierum, ſe ſuſtentaſſe ſupra altitudinem 28, 03, quae prorſus hoc anno cum media conuenit.

3. Deſcenſus et aſcenſus mercurii in tubo Barometri notabiliores.

NB. Signa + et —, quae differentias altitudinum barom.: praecedunt, aſcenſus vel deſcenſus mercurii indicant.

Menſe.	Tempore. die, hora.	Diff. hor.	Barom. Dig.p.c.	Differ. p. c.	Ventus	Thermom.	Atmoſphaera.
	7. meridie	24	28,47	−40	W fort.	152	coelum obductum nix.
	8. meridie	35	28,07	+75	SW fort.	152	coelum obductum nix.
	9. 11.p.m.		28,82		N	172	coel. nubiloſ. dein ſeren.
	12. 8. a. m.	14	28,61	−38	malacia	156	coelum obductum.
	— 10. p. m.		28,23		SW fort	149	coel. obductum nix.
	14. 3. p. m.	29	28,77	−49	malacia.	183	coel. ſeren. dein obd. nix.
	15. 8. p. m.		28,28		N	174	coelum ſerenum.
Ian.	18. 3. p. m.	33	28,24	−84	O	183	coel. ſeren. dein obduct.
	19. 12.p.m.	24	27,40	+40	O val. f.	174	coelum obductum.
	20. 12.p.m.	14	27,80	−40	W	172	coel. ſeren.
	21. 2. p. m.		27,40		W val. f.	157	coel. obduct., nix copioſa.
	25. 6. p. m.	24	28,13	−68	malacia.	178	coel. ſeren.
	26. 6 p. m.		27,45		SO val. f.	160	nix. coel. obductum.
	27. 10.p.m	17	27,64	+59	W fort.	154	coelum obductum.
	28. 3. p. m.	21	28,23	−51	SO fort.	167	coel. ſeren. dein nix.
	29. meridie		27,72		SW fort.	149	coel. obductum, pluuia.
	30. 9. p. m.	18	27,64	−40	SW	147	coelum obd. pluuia,
	31. 3. p. m.	33	27,24	+63	SW fort.	147	dein nix.
Febr.	1. med. nocte		27,87		NW	166	coelum ſeren.
	5. 9. p. m.	27	28,09	−66	NO	173	coel. obduct. et nebuloſ.
	6. 12.p.m.	48	27,43	+100	NW fort.	165	coelum obduct. nix.
	8. 12.p.m.		28.43		N	176	coelum nubil.
	12. 12.p.m.	39	28 02	−72	S fort.	158	coel. obduct. dein nix.
	14. 3 p. m.		27.30		S val. fort	150	coelum obductum.

Deſcenſus et aſcenſus Barometri notabiliores.

Menſe.	Tempore. die. hora.	Diff. hor.	Barom. Dig.p.c	Differ. p. c.	Ventus	Thermom.	Atmosphaera.
Febr.	19. 12. p. m.	36	28,45	+42	N fort.	166	coelum obductum.
	21. meridie	36	28,87	−52	NO	173	coel. ſeren.
	22. 12. p. m		28,35		N	172	coel. nubiloſ.
	13. 12. p. m.	6	27,95	−25	W fort.	152	coel. obduct.
	14. 6. a. m.	12	27,70	+40	NW fort	153	nix.
	14. 6. p. m.		28,10		N	156	coel. ſeren.
	16. 6. a. m.	16	28,08	−38	NW fort	158	coel. ſeren.
	16. 10. p. m.		27,70		— —	148	— —
	18. 12. p. m.	22	27,93	−61	NW fort	160	coel. obd. deinde nix.
Mart.	19. 10. p. m.	36	27,32	+76	NW	159	nix copioſa.
	21. 10. a. m.	18	28,08	−38	NW	164	coel. nubil. dein nix.
	22. 4. a. m.	38	27,70	+51	NO	163	coel. nubil.
	23. 6. p. m		28,21		NO	160	coel. nubil. dein nix.
	27. 4. a. m.	44	27,35	+66	NO fort.	155	coel. obd. deinde nix.
	28. 12. p. m.	33	28,01	−50	O vald. f.	170	coel. ſeren.
	30. 9. a. m		27,51		W fort.	156	coel. obductum.
	31. meridie	70	27,50	+114	NW fort	154	nix. coel. nubiloſ.
	3. 10. a. m		28,64		malac.	164	nebul. dein coel. ſeren.
	9. 8. a. m.	24	28,12	−57	W	148	coel. nubiloſ.
	10. 8. a. m.	31	27,55	+43	SW fort.	143	coel. obd. nix.
	11. 3. p. m.		27,98		NW	143	coel. ſeren.
April.	14. 6. a. m.	16	27,33	+44	W valde	149	coel. nubil. deinde nix. & pl.
	14. 10. p. m.		27,77		— fortis	149	coel. obd.

Menſe

Deſcenſus et aſcenſus Barometri notabiliores.

Menſe.	Tempore. die, hora.	Diff. hor.	Barom. Dig. p. c.	Differ. p. c.	Ventus.	Thermom.	Atmoſphaera.
April.	16. 6. a. m.	22	27 45	+77	NW	149	nix. coel. obductum
	17. 4. a. m	20	28,22	—50	W fort.	156	coel. nub. dein obd. pluu.
	17. 12. p. m.	38	27,72	+96	N	147	coel. nubil.
	19. 2. p. m.		28,68		N	151	coel. ſeren.
	19. 12. p. m.	57	28,26	—69	malac.	131	coel. ſer. dein. grando et
	22. 9. a. m.		27,57		NW	134	coel. obd. pluuia. (tonitru.
Iulius	22. 12. p. m.	24	27,63	—41	NO	131	coel. obduct. et
	23. 12. p. m	30	27,22	+44	N	131	pluuia
	25. 6. a. m.		27,66		O fort.	132	copioſa
Aug.	22. 12. p. m.	30	28,03	—44	NO	136	coel. ſeren.
	24. 6. a. m.	42	27,59	+69	W val. f.	132	pluuia copioſa et coel. obd.
	25. 12. p. m.		28,28		O	138	coel. nubil.
Sept.	31. 9. p. m.	33	27,83	+57	W fort.	134	Tonitru et pluu. copioſa
	2. 6. a. m	32	28,40	—42	O	136	coel. obd.
	3. 2. p. m.		27,98		S	129	pluuia cop. coel. nubil.
	7. 6. a. m.	33	27,56	+68	SW	139	coel. obd. pluu. copioſa.
	8. 3. p. m		28,24		W	146	coel. nub.
	14. 12. p. m.	36	28,42	—67	W	139	pluu. coel. nubil.
	16. meridie	33	27,75	+37	SW val. f.	137	coel. obd. deinde pluuia
	17. 9. p. m.	33	28,12	—61	W	142	coel. obduct.
Oct.	19. 6. a. m.		27,51		SW fort.	140	coel. obd. pluuia
	23. 4. a. m.	18	27,22	+53	W	147	coel. obduct. nix et pluuia
	— 10. p. m.	48	27,75	+53	W	149	id.
	25. 10. p. m.		28,28		SW	153	coel. ſeren.
	26. 6. p. m.	24	28,17	—77	SW fort.	148	coel. obd. deinde nix
	27. 6. p. m.	52	27.40	+67	id.	145	nix copioſa
	29. 10. p. m.		28.07		W	149	coel. nubil.

Deſcenſus et aſcenſus Barometri notabiliores.

Menſe.	Tempore. die. hora.	Diff hor.	Barom. Dig.p.c.	Differ. p. c.	Ventus	Thermom.	Atmosphaera.
	14. 3. p. m.	24	27,45	+54	S fort.	144	coel. obd. pl. cop. deinde nix
	15. 3. p. m.	24	27,99	−43	NW	151	coel. ſeren.
	16. 3. p. m.		27,56		SO fort.	147	nix, grando et pl. coel. obd.
	18. 12. p. m.	12	27,74	−19	SW	147	coel. obd. pluuia.
Nov.	19. meridie	46	27,55	+62	SO fort.	144	coel. nubil.
	21. 10. a. m.		28,17		SW	149	coel. nubil.
	22. 10. a. m.	20	28,17	−32	SW	150	coel. nubil.
	23. 6. a. m.		27,85		id.	151	coel. ſeren.
	23. 6. p. m.	36	27,87	+52	SW	149	coel. obd. pl. nix copioſa.
	25. 6. a. m.		28,39		malacia.	153	coel. obd. deinde nix.
	16. 12. p. m.	27	28,00	+47	N	176	coel. ſeren. deinde nebul.
	18. 3. a. m.	33	28,47	−54	NW	188	coel. ſeren. deinde obd.
	19. meridie	45	27,93	+90	N fort.	165	coel. obd. nix
	21. 9. a. m.	55	28,83	−98	malacia.	189	nebula, coel. ſeren.
Dec.	23. 4 p. m.		27,85		N fort.	167	nix cop. coel. deinde nubil.
	24. 6. p. m.	22	28,08	−63	S	170	coel. ſer. dein nix, grando
	25. 4. p. m.	20	27,45	+45	S. veh. f.	150	coel. obd.
	26. meridie		27,90		SW	163	coel. nubil. nix copioſa
	27. meridie	15	27,81	+27	N fort.	151	nebula, coel. obd.
	28. 3. a. m	45	28,08	−65	SO fort.	177	coel. obd.
	29. 12. p. m	48	27,43	+72	SO	181	coel. ſer. deinde nubil. et nix
	31. 12. p. m.		28,15		N	195	coel. ſerenum.

II. Ther-

II. Thermometrum.

1. Thermometri altitudines minimae, maximae et mediae pro ſingulis menſibus anni 1781.

Menſe	Altitudo minima.			Altitudo maxima.			Diff.	Altit. media.	
	Gr.	Die	hora	Gr.	Die	hora		nocte	merid.
Ianuar.	186	1.	10. p. m.	146	29. 30. 31.	2. p. m. 9. a. m. 9. a. m.	40	169,9	161,8
Februar.	182	21.	6. a. m.	147	15.	2. p. m.	35	167,9	161,1
Martii	175	11. 12.	6. a. m.	145	16.	2. p. m.	30	162,8	153,2
Aprilis	176	3.	6. a. m.	130	22.	2. p. m.	46	153,2	142,9
Maii	154	8.	6. a. m.	118	21.	2. p. m.	36	144,9	135,7
Iunii	143	4. 5.	6. a. m.	115	29.	2. p. m.	28	134,1	125,6
Iulii	137	4.	6. a. m.	108	10.	2. p. m.	29	130,1	122,1
Auguſti	143	25.	6. a. m.	109	4.	2. p. m.	34	128,0	119,5
Septemb.	144	7. 12.	6. a. m.	121	18. 26.	2. p. m.	23	134,5	126,8
Octobr.	154	25.	6. a. m.	128	2.	2. p. m.	26	145,8	140,4
Nouemb.	155	21. 26.	7. a. m. 9. a. m.	137	3.	2. p. m.	18	149,3	145,5
Decemb.	201	31.	9. a. m.	149	1. 25.	2. p. m.	52	169,0	163,6
Anno 1781.	201	MenſeDecemb.		108	Menſe Iulii.		93	149,0	141,4

2. Sta-

2. Status frigoris et caloris.

Menſe.	Dies frigid. Gradibus.						Dies calidiores Gradib.				
	200	190	180	170	160	150	110	120	130	140	150.
Ianuar.			8	17	23	29					4.
Februar.			2	13	23	27					3.
Mart.				6	20	30					10.
April.				1	4	20				11	25.
Maii						7		1	7	21	30.
Iunii								5	24	30	30.
Iulii							1	13	29	31	31.
Auguſt.							1	20	28	31	31.
Septembr.									23	30	30.
Octobr.						7			1	15	30.
Nouembr.						14				2	29.
Decembr.	1	4	7	12	22	31					2.
Anno 1781.	1	4	17	49	92	165	2	39	112	171	255.

3. Speciatim frigus obſeruatum fuit intra gradus.

	Dies
200 et 210. die 31 Decembris - - - -	1.
190 et 200. d. 17. 21. 30 Decembris - - -	3.
180 et 190. d. 1. 14. 16. 18. 19. 22. 23. 25 Ianuarii, d. 21. 22 Februarii et d. 18. 20. 29 Decembris - - - - - -	13.
170 et 180. d. 2. 5. 9. 10. 13. 15. 17. 20. 24 Ian. d. 3. 5. 6. 8 — 11. 20. 23. 24. 26 Febr. d. 10. 11. 12. 21. 23. 28 Mart. d. 3 Apr. et d. 16. 22. 23. 24. 28 Decembris -	32.

160

	Dies
160 et 170. d. 3. 4. 6. 21. 26. 28 Ian. d. 1. 2. 4. 7. 12. 18. 19. 25. 27. 28 Febr. d. 1. 2. 9. 15. 17. 18. 20. 22. 24. 25. 27. 29. 30. 31 Martii, d. 1. 2. 4 Aprilis et d. 5. 7 – 10. 15. 19. 25. 26. 27 Decembris -	43.

Calor autem deprehenſus fuit intra gradus.

	Dies
110 et 100. d. 10 Iulii et d. 4 Auguſti - -	2.
120 et 110. d. 21 Maii, d. 8. 16. 19. 20. 29. Iunii, d. 5. 7. 8. 9. 11. 12. 14. 20. 28 – 31 Iulii, et d. 1. 2. 3. 5. 7 – 18. 20. 29. 30 Auguſti - - - - - - -	37.
130 et 120. d. 1. 14. 15. 19. 20. 30 Maii, d. 7. 9 – 15. 17. 18. 21 – 28. 30 Iunii, d. 1. 3. 4. 6. 13. 15. 16. 18. 19. 21 –– 27 Iulii, d. 6. 19. 22. 23. 26. 27. 28. 31 Auguſti, d. 2. 3. 4. 9. 10. 13 – 30 Sept. et die 2 Octobris - - - - - -	73.
140 et 130. d. 9. 12. 13. 21 – 24. 27 – 30 Aprilis, d. 2. 3. 4. 6. 9. 12. 13. 16. 17. 18. 22. 28. 29. 31 Maii, d. 1 – 6 Iunii, d. 2. 17 Iulii, d. 21. 24. 25 Aug., d. 1. 5 – 8. 11. 12 Sept., d. 1. 3 – 7. 9. 11. 13 – 17. 19 Oct. et d. 3. 9 Nouembris -	59.

Ex Tabula I^{ma} intelligitur, per totum annum fuiſſe.

1. Altitudinem Thermometri minimam, ſeu gradum frigoris maximi 201 grad. Deliſl. die vltima menſis Decembris hora antemeridiana 9^a. Barom. 28, 12, coelum nubiloſum: Boreas.

2. Altitudinem Thermometri maximam, ſeu gradum caloris maximi 108 grad. Deliſl. menſe Iulii die 10^a, hora poſtmeridiana 2da. Barom. 28, 03. Aeſtum conſequebatur tempeſtas turbulenta cum imbre et grandine: procella e regione SO furebat.

3. Hinc variationem Thermometri maximam 93 grad. ſecundum diuiſionem Delislianam.

4. Frigus medium, ſeu altitudinem Thermometri mediam intra omnes mane et veſpere obſeruatas 149 graduum: et calorem medium, ſeu altitudinem Thermometri mediam intra omnes meridianas $141\frac{2}{3}$ graduum. Sin autem menſes aeſtiuos Maium — Octobrem, ab hyemalibus Ianuar. — April. Nouembr. et Decembr. ſeparamus, inuenimus in illis calorem medium $128\frac{1}{3}$ gr. in his frigas medium $160\frac{1}{2}$ graduum fuiſſe.

5. Tabula II^{da} docet, hoc anno 165 dies fuiſſe frigidiores gradu 150, vel termino congelationis naturalis: inter quos 92 numerauimus, quibus frigus gradum 160 ſuperauit: fuerunt autem in his 49 dies frigidiores gradu 180 et 4 dies, quibus frigus gradum 190 excedebat.

6. De-

6. Denique ex eadem Tabula 2[da] patet, hoc anno 1781, quoad calorem 255 dies calidiores fuiſſe gradu congelationis naturalis 150, inter quos annotati reperiuntur 171 dies calidiores gradu 140, porro 112 dies, quibus calor ſuperabat gradum 130 et 39, quibus calor gradum 120 excedebat.

III. Ventus et Ventorum Directiones.

Menſe	Malacia	Vent. lenis	Vent. fortis	Procellae	Nord	N-O	Oſt	S-O	Sud	S-W	Weſt	N-W
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ianuar	4	12	9	6	5	1	6	3	2	5	6	3
Febr.	1	13	12	2	4	4	1	8	6	0	1	4
Mart.	2	13	14	2	7	3	2	0	0	4	6	9
April.	10	12	2	6	7	3	1	0	2	3	6	8
Maii	7	13	10	1	9	2	0	0	3	0	4	13
Iunii	8	12	8	2	2	4	2	1	1	1	12	7
Iulii	7	11	10	3	3	3	7	2	1	3	6	6
Aug.	6	14	9	2	1	3	3	1	1	6	13	3
Sept.	7	12	11	0	1	0	7	5	3	0	12	2
Oct.	1	21	5	4	1	2	1	2	6	10	7	2
Nou.	5	17	7	1	0	0	1	8	6	6	6	3
Dec.	1	18	11	1	8	0	4	2	5	4	5	3
Anno 1781.	59	168	108	30	48	25	35	32	36	42	84	63

Patet

Patet hinc, hoc anno praecipue Zephyrum dominatum tenuiſſe, tum vero ventum e plaga NW. frequentius regnaſſe caeteris, deinde Boream. Malaciae imprimis obſeruatae fuerunt menſibus Aprilis et Iunii: procellae vero et venti vehementiores ſaepius occurrerunt menſibus Ianuarii et Martii.

In ſpecie autem procellae hoc anno perfurebant e regione.

N. die 1. Febr. - - - - -	1.	dies.
O. die 19. Ian. 27. 28. Mart. 20. Iulii -	4.	
SO. die 26. 27. Ian. 10. Iulii - - -	3.	
S. die 14. Febr. 15. Apr. 31. Maii, 14. Nou. 25. Decembris - - - - -	5.	
SW. die 29. Ian. 13. 14. Apr. 13. Iul. 31. Aug. 15. 16. 18. 27. Octobr. - - -	9.	
W. die 7. 21. Ian. 9. 17. Apr. 10. Iunii, 24. Aug.	6.	
NW. die 16. Aprilis, 23. Iunii - - -	2.	

IV. Conſtitutio Coeli.

Menſe.	Coelum ſerenum dies	Coelum obductum dies	Nebuloſum dies	Pluuia dies	Nix dies	Quantit. aquae pluuiae. Dig. p. c.
Ianuar.	8.	17.	5.	3.	13.	0, 97.
Februar.	2.	12.	9.		10.	0, 46.
Martii	6.	9.	1.		13.	0, 44.
Aprilis	14.	4.	4.	6.	6.	0, 71.
Maii	11.	5.	4.	7.	4.	0, 84.
Iunii	15.	2.	3.	10.		1, 44.
Iulii	9.	7.	2.	17.		3, 85.
Auguſti	12.	2.	3.	14.		2, 36.
Septemb.	10.	4.	4.	6.		1, 62.
Octobr.	2.	15.	4.	19.	4.	1, 75.
Nouemb.	1.	19.	9.	19.	13.	1, 73.
Decemb.	3.	12.	7.		16.	1, 5
Anno 1781.	93.	108.	55.	101.	79.	17, 27.

V. Reliqua Phaenomena.

Grando cecidit diebus 6; die ſcilicet 24. Maii, 10 20. Iulii, 28. Octobris, 17. Nouembris et die 25. Decembris.

Aurorae boreales annotatae fuerunt 29. et quidem 15. perlucidae die 22. Ian. 21. Febr. 14. 28. 29. Mart. 28. Aprilis, 12. Aug. 23. 24. 25. 26. Septembr. 3. Octobr. 15. Nouembr. et die 9. 30. Decembris. Tum vero 14. Aurorae boreales debiliores die 17.

23. Ian. 16. 22. 31. Martii, 13. 16. 17. 19. 25. 26. Aprilis, 18. Septembr. 16. Octobr. et die 16. Decembris.

Tonuit 16^{es}. e longinquo die 16. 22. Iunii, 1. 12. 20. Iulii, 10. 19. 30. Aug. et vicine die 10. 13. Iunii, 5. 13. 15. 18. 29. 31. Auguſti.

Flumen Neua a glacie liberabatur die 25. Aprilis, poſtquam per dies 155. glacie obductum perſtitit. Tum vero poſt 227. dies, hoc eſt menſe Decembris, die 8. iterum glacie obducebatur.

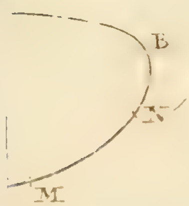
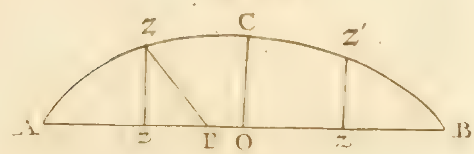
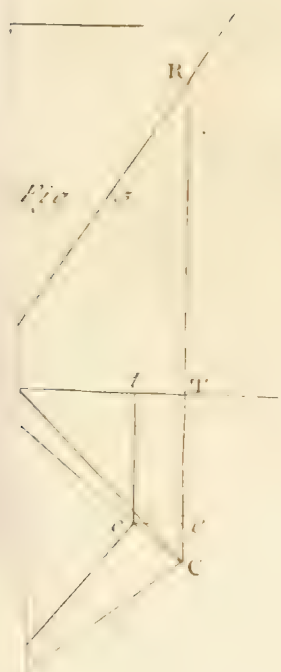


Fig. 2.



C

Fig. 3.



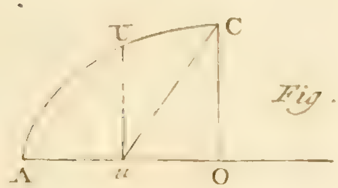
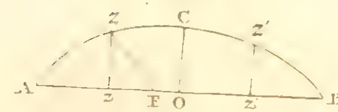
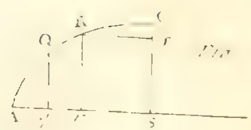
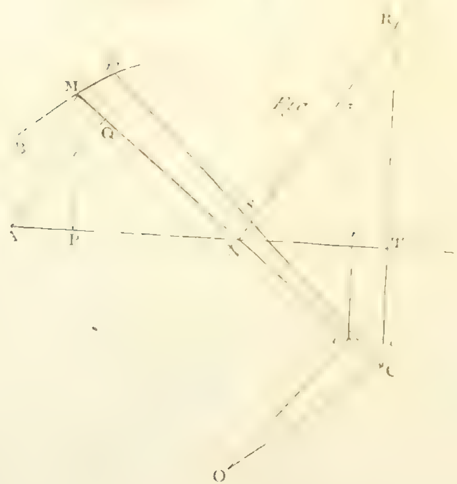


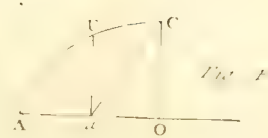
Fig. 4.




Fig. 2
Z
C
Z'
A
z
E
O
z'
B


Q
R
C
S


M
Q
P
T
C
O


C
A
O

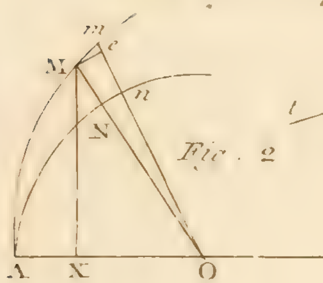


Fig. 2.

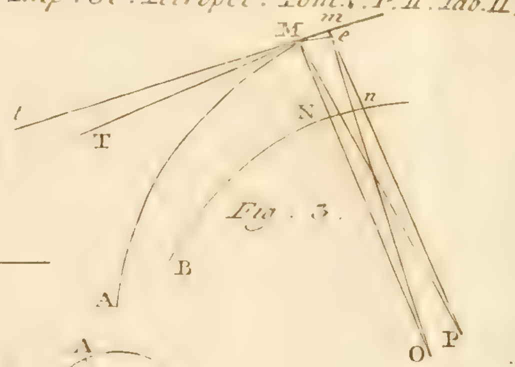
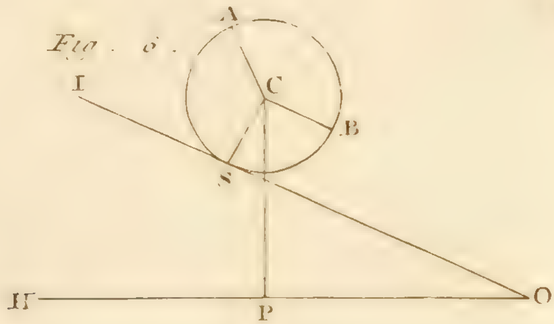
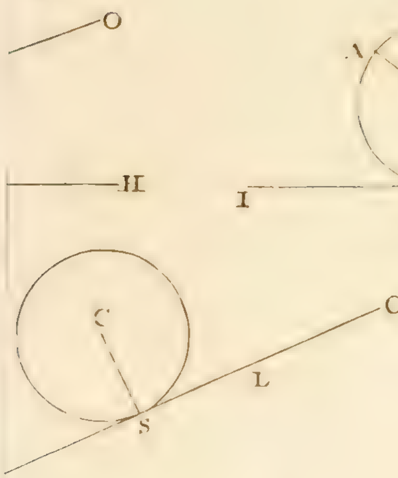


Fig. 3.

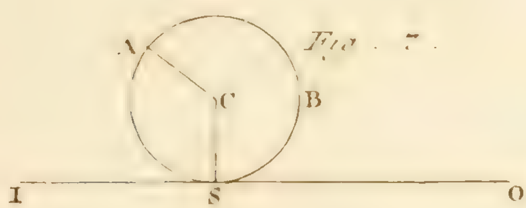
Fig. 6.

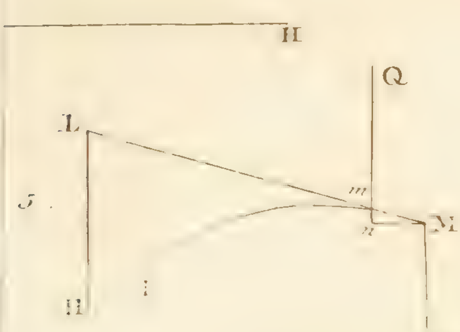




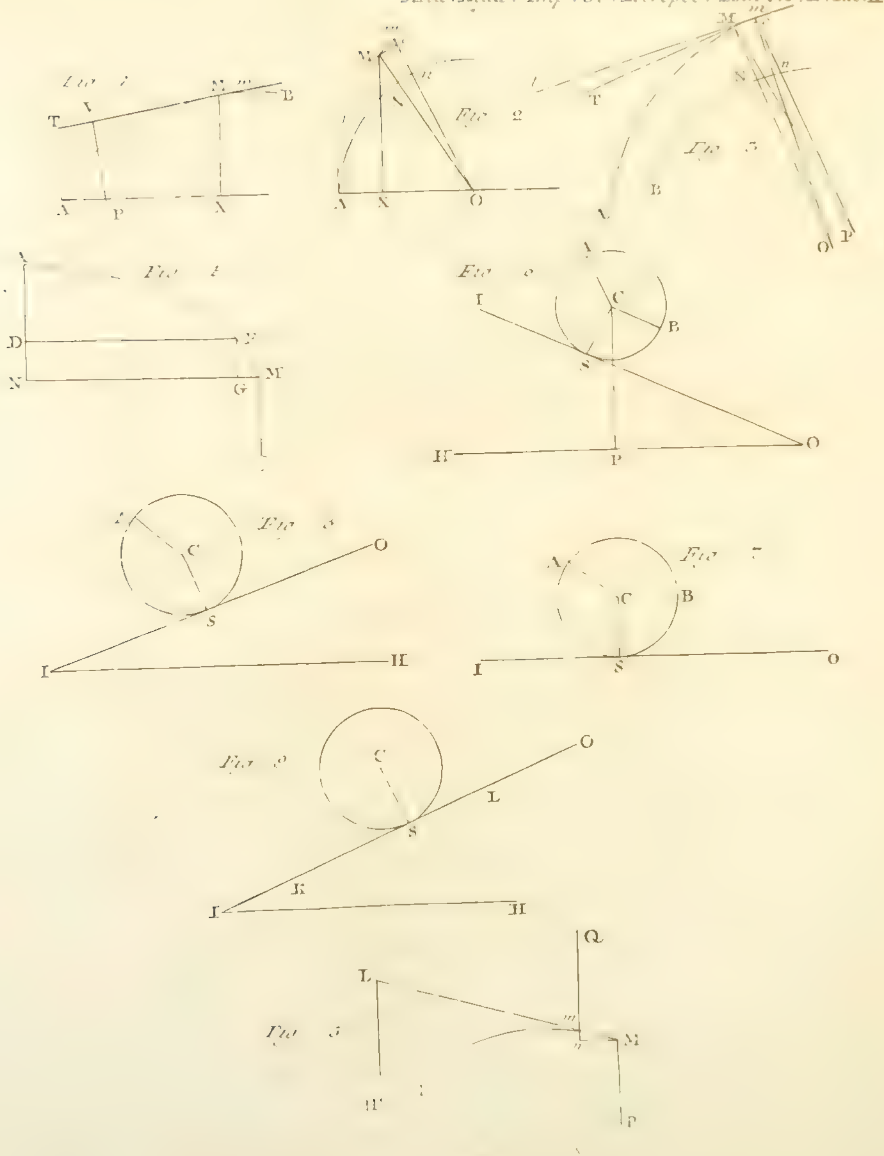
8.

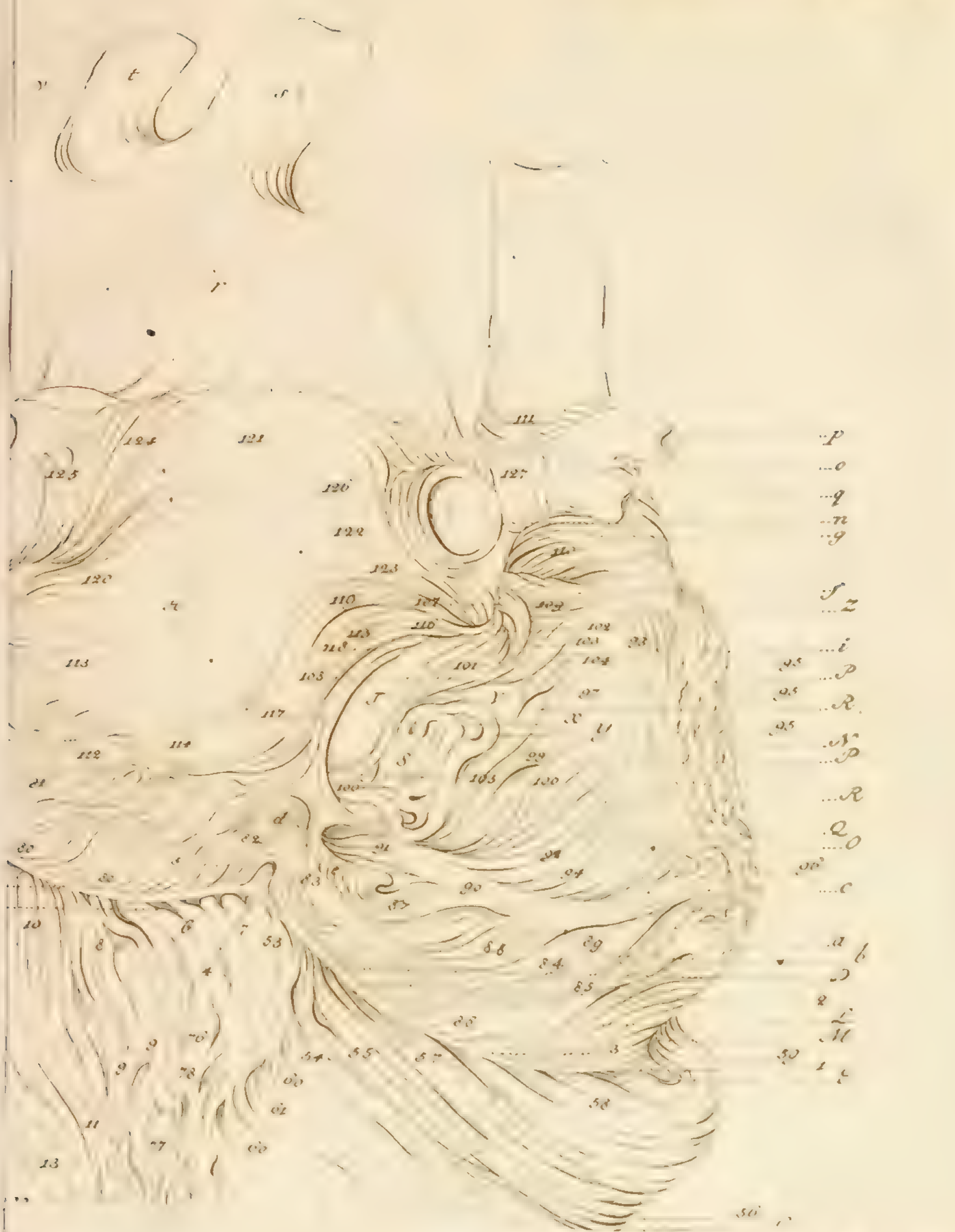
Fig. 7.





5.







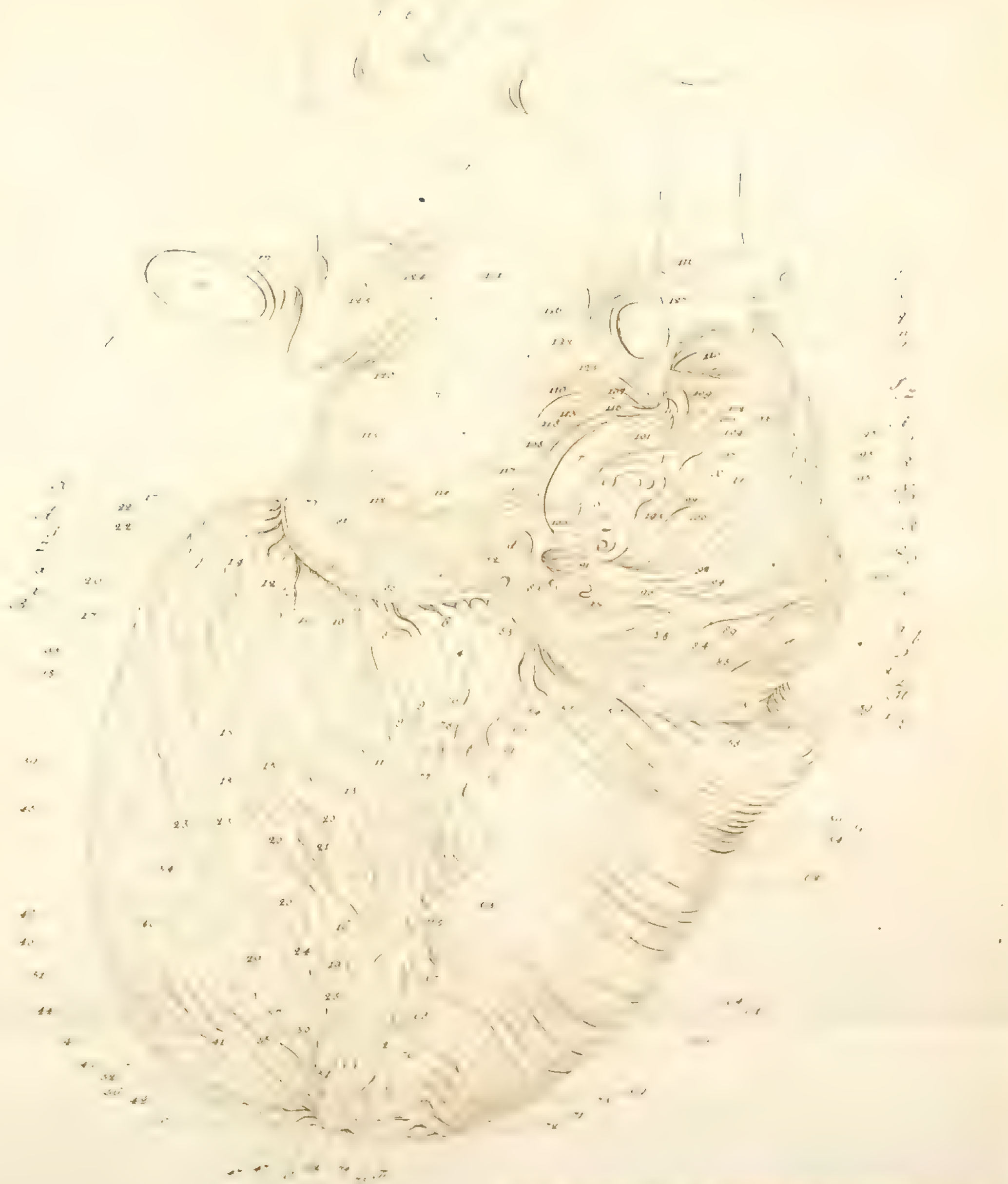








Fig. 1



Fig. 2



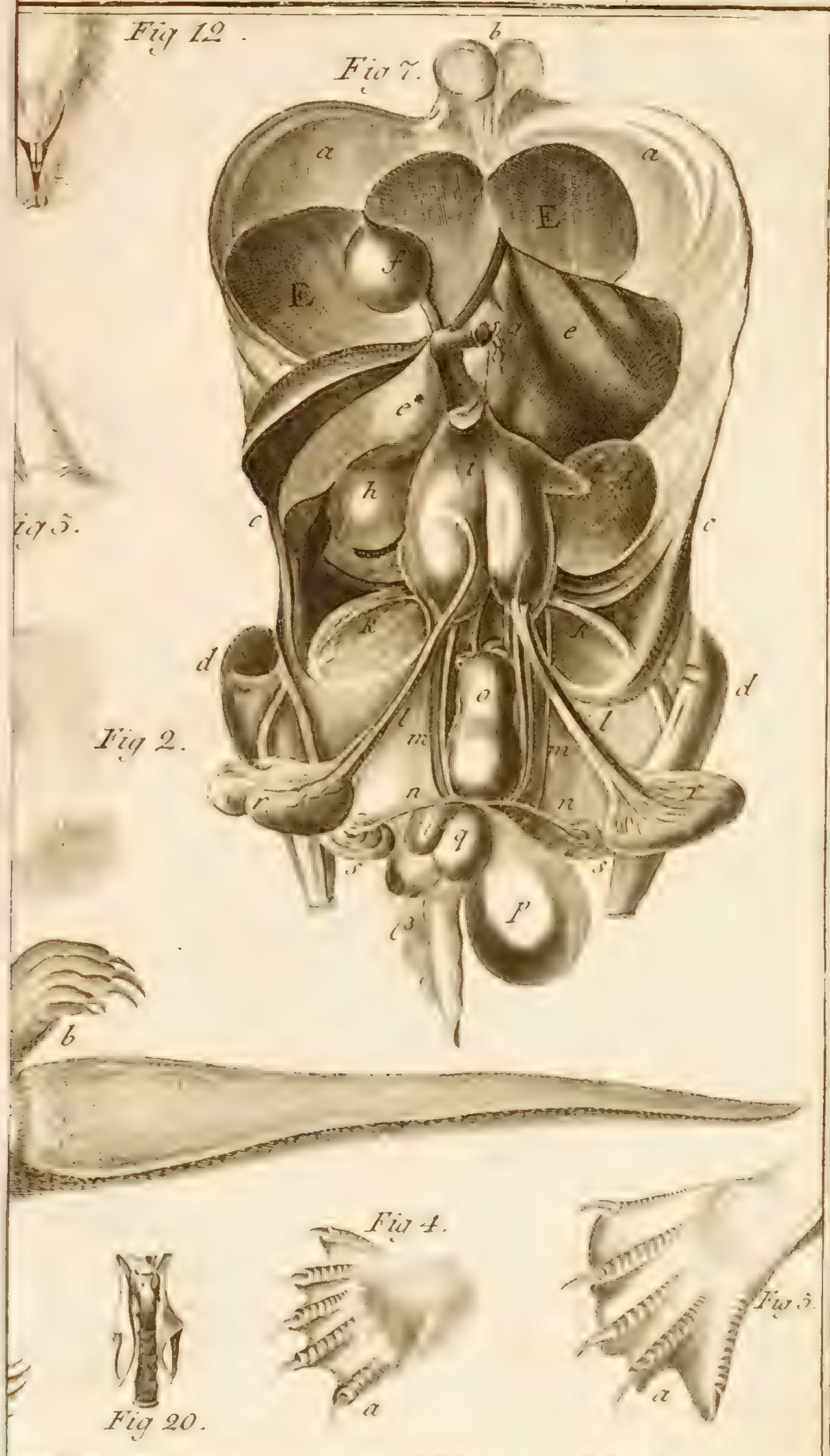

Fig 12.
Fig 7.
Fig 2.
Fig 4.
Fig 5.
Fig 20.


Fig. 12
Fig. 7
Fig. 13
Fig. 6.
Fig. 3.
Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 2
Fig. 8.
Fig. 5
Fig. 1.
Fig. 4
Fig. 3
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 17
Fig. 16.
Fig. 20.

Acta Ac. Sc. Petr. 1781. II. p. I

Hablizl, über die Futterkräuter der Bucharen p. 21,

1.) Luzern.

2.) Weiße Artemisie

3.) Schembebile eine noch unbekannte Pflanze

Wolff de ordine fibrarum cordis diss. III de fibris externis ventriculi dextri p. 221. t. tab. III

Daturae novae hybridae auctore Koelreuter.

Sorices aliquot illustrati a Pallas p. 314

1.) Sorex moschatus p. 315 t. 3 et t. 5 fi. 1 – 11.

2.) Sorex myosurus p. 337 t. 4. fig. 1. et. 2. t. 5. fig. 12 – 20

Acta Academiae Scientiar
1781
Acta Academiae Scientiar
1781 pars 2 16-
FEB 13 1942 Carter

AMNH LIBRARY
100125057